КАФЕДРА НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ І ГРАФІКИ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ
І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

“ХАРКІВСЬКИЙ
ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ“

КОНСТРУЮВАННЯ ДЕЯКИХ ПОВЕРХОНЬ ТА ПЕРЕТИН ЇХ ПРЯМОЮ

Методичні вказівки

НТУ " ХПІ" 2003

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ И НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

КОНСТРУЮВАННЯ ДЕЯКИХ ПОВЕРХОНЬ ТА ПЕРЕТИН ЇХ ПРЯМОЮ

Методичні вказівки
для студентів машинобудівних спеціальностей

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету
Протокол № від

Харків 2003

Теоретичні положення та методичні рекомендації за темою "Конструювання деяких поверхонь та перетин їх прямою". Для самостійної роботи студентів машинобудівних спеціальностей /Укладачі. Н.О. Федоренко та ін. - Харків: НТУ "ХПІ", 2003 - 39 с.

Укладачі: ФЕДОРЕНКО НІНА ОЛЕКСАНДРІВНА
ГЛІБКО ОЛЕНА АНАТОЛІЇВНА
ШЕВЧЕНКО МИХАЙЛО МИХАЙЛОВИЧ
ШУТЄЄВА ЛІДІЯ МИКОЛАЇВНА
ІВАШКО АНДРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ

Кафедра нарисної геометрії та графіки

Відповідальний випусковий А.М. Краснокутський

НТУ " ХПІ", 61002 Харків, вул. Фрунзе, 21

1 УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

При виконанні завдання треба користуватися умовними позначеннями та деякими загальноприйнятими символами. Прийнято позначати:

1. Площини проекцій - прописною грецькою літерою П з індексом 1,2,3.

$П_1$ - горизонтальна площина проекцій;

$П_2$ - фронтальна площина проекцій;

$П_3$ - профільна площина проекцій;

2. Точки у просторі - великими буквами латинського алфавіту: A,B,C..., арабськими цифрами 1,2,3,...

3. Пряма лінія - малими буквами латинського алфавіту: a,b,c...

Лінії рівня позначаються таким чином:

h - горизонталь;

f - фронталь;

p - профільна пряма рівня;

4. Для прямих також використовуються позначення: <AB> - пряма, що проходить через точки A і B. [AB] - відрізок прямої, обмеженої точками A і B.

5. Плоскі кути позначаються буквами грецького алфавіту з написанням знака $\angle$: $\angle \boldsymbol{\alpha}$, $\angle \boldsymbol{\beta}$, $\angle \boldsymbol{\gamma}$.

6. Проекції точок і прямих - тими ж буквами та цифрами, що і в натурі, з добавленням підпорядкового індексу відповідної площини проекцій: $\mathbf{A_1, B_1...}$ $\mathbf{A_2, B_2... A_3, B_3; a_1, b_1, c_1...}$.

7. Натуральну систему координат - латинськими буквами **X,Y,Z.**

8. Лінії перетину площин проекцій (осі проекцій) на кресленні - $\mathbf{X_{12}}$, Y_{13}, $\mathbf{Z_{23}}$.

9. Початок координат - літерою **O**.

10. Належність позначається знаком Є або $\supset$:

A Є a - точка **A** належить прямій **a**;

a $\supset$ **A** - пряма **a** містить точку **A**.

11. Об'єднання двох елементів – знаком $\cup$:

l = **A** $\cup$ **B** - пряма l об'єднує точки **A** і **B**.

12. Перетин двох множин – знаком $\cap$:

l = P $\cap$ **R** - пряма являє собою перетин площин **P** та **R**.

13. Лінії проекційного зв'язку, перпендикулярні осі **X**, позначаються знаком $\mathbf{PN_x}$.

14. Кон'юнкція речень (сполучник і) позначається знаком ^:

P ^ G це **P і G**

15. Диз'юнкція речень (сполучник "або") позначається знаком $\vee$:

$$\mathbf{P} \vee \mathbf{G} \text{ це } \mathbf{P} \text{ або } \mathbf{G}$$

16. Відстань між елементами простору позначаються двома вертикальними лініями: **/AB/** - відстань від точки **A** до точки **B** (довжина відрізка **AB**).

17. Паралельність позначається знаком //.

18. Перпендикулярність позначається знаком $\perp$**.**

19. Імплікація - логічний наслідок позначається знаком $\Rightarrow$:

a // c і b // c $\Rightarrow$ a // b - якщо дві прямі паралельні третій, то вони паралельні між собою.

2 ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЗАВДАНЬ

1. Завдання виконується на аркуші креслярського паперу формату А4 (297 х 420) в масштабі 1:1. Рамку формату та напис наносити так, як показано на зразку виконання ОДЗ (рис. 26). При цьому зліва залишати поле шириною 20 мм для підшивки, відповідно вимогам ГОСТ 2.303-68.

2. Товщина і тип ліній креслення повинні відповідати ГОСТ 2.303-68. Рамку, проекції прямих, контурні лінії на зображеннях геометричних тіл виконувати суцільною лінією товщиною **0,8 - 1,0** мм.. Лінії проекційного зв'язку, осі проекцій - товщиною **0,3** мм. Лінії невидимого контуру - штриховою лінією товщиною **0,5** мм. Фіксовані точки на кресленні обводити колами діаметром **1,5 - 2** мм.

3. Графічні побудови, які відносяться до розв'язання задач, слід виконувати спочатку тонкими лініями, а потім обводити. Допоміжні побудови залишати на кресленні до перевірки викладачем вірності рішення задач·.

4. Всі лінійні розміри та координати точок в умовах задач задані в міліметрах.

5. Надписи та позначення виконувати шрифтами **3,5** та **5** згідно з ГОСТ 2.304 - 81.

3 ЗМІСТ ЗАВДАННЯ

1. За заданим визначником побудувати поверхню.

2. Визначити точки перетину побудованої поверхні з прямою, яка задається відрізком **AB.**

3. Визначити видимість прямої на кресленні.

4 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Поверхня - одне з основних геометричних понять. У різних розділах геометрії це поняття має різні тлумачення. У нарисній геометрії на кресленні поверхня, здебільшого, задається кінематичним способом, тобто так, як вона утворюється внаслідок безперервного руху у просторі лінії – твірної за певним законом. Закон руху у просторі зручно задавати нерухомими лініями - напрямними. Твірні та напрямні можуть бути як прямими, так і кривими лініями.

Для побудови поверхні необхідно знати визначник поверхні. Визначник поверхні - це сукупність окремих геометричних елементів, що визначають дану поверхню.

Поверхні можна розділити на многогранники та криві поверхні. Доцільна умовна класифікація поверхонь за ознаками форми твірної та кількості і розташування напрямних. Поверхні, твірною яких є пряма лінія, називають лінійчатими. Лінійчаті поверхні поділяються на розгортні і нерозгортні. Многогранники є розгорненими поверхнями, тобто усі їхні грані можна сумістити з площиною.

Розгортні криві поверхні - це такі, у яких суміжні прямолінійні твірні належать одній площині, тобто паралельні між собою, перетинаються або дотичні до деякої просторової кривої. Ці поверхні можна сумістити всіма точками з площиною без деформації. До таких поверхонь належать конічні та циліндричні поверхні.

Нерозгортні поверхні не можна точно сумістити з площиною. До них належать так звані нерозгортні лінійчаті поверхні з площиною паралелізму та криві нелінійчаті поверхні.

Поверхні, твірною яких є крива лінія, називають нелінійчатими. Форма цієї твірної під час руху може залишатися постійною або деформуватися. Відповідно з цим їх називають поверхнями з твірною постійної форми або зі змінною твірною. Така поверхня вважається заданою, якщо у будь-який момент руху твірної можна визначити її форму і положення. Поверхні з твірною, що деформується, можна поділити таким чином:

Циклічні поверхні, що утворюються внаслідок руху за певним законом кола змінного радіуса.

Каналові поверхні, які утворюються рухом кола змінного радіуса вздовж кривої напрямної за умови збереження перпендикулярності площини кола до напрямної.

Трубчасті поверхні утворюються за допомогою переміщення вздовж кривої кола постійного радіуса.

За способом руху твірної поверхні можна поділити на поверхні з поступовим переміщенням твірної (поверхні паралельного переносу), поверхні обертання, що утворюються обертанням твірної лінії навколо нерухомої прямої осі, та гвинтові поверхні, що утворюються рухом відрізка прямої по двох напрямних, одна з яких є гвинтовою лінією, а друга - її віссю.

5 КОНСТРУЮВАННЯ ДЕЯКИХ ПОВЕРХОНЬ

5.1 Многогранники

Многогранник - це частина простору, зо всіх боків обмежена площинами - плоскими многокутниками. Многогранники поділяються на випуклі та випуклоувігнуті (зірчасті). Випуклі многогранники - це ті, що уся поверхня знаходиться по один бік від кожної його грані. У зірчастих многогранників кожна грань поділяється на дві ділянки : зовнішню (видиму) та внутрішню (невидиму). Крім того, многогранники бувають правильні та неправильні. Випуклий многогранник називають правильним, якщо його грані є правильні рівні многокутники. Многогранні кути такого многогранника відповідно рівні між собою.

Є п'ять типів правильних многогранників - правильні тіла Платона (рис. 1).Класифікація тіл Платона наведена у таблиці, де прийняті наступні умовні позначення:

F - кількість граней многогранника;
В - кількість вершин многогранника;
Р - кількість ребер многогранника;
П - кількість сторін плоскої

Таблиця

Параметр / Тіло Платона	Г	В	Р	П
Тетраедр	4	4	6	3
Куб	6	8	12	4
Октаедр	8	6	12	3
Додекаедр	12	20	30	5
Ікосаедр	20	12	30	3

5.1.1 Правильний чотирьохгранник - тетраедр

Він обмежений чотирма рівносторонніми, тобто рівними, трикутниками. Перпендикуляр, проведений з будь-якої вершини тетраедра, на протилежну грань, пройде через її центр.

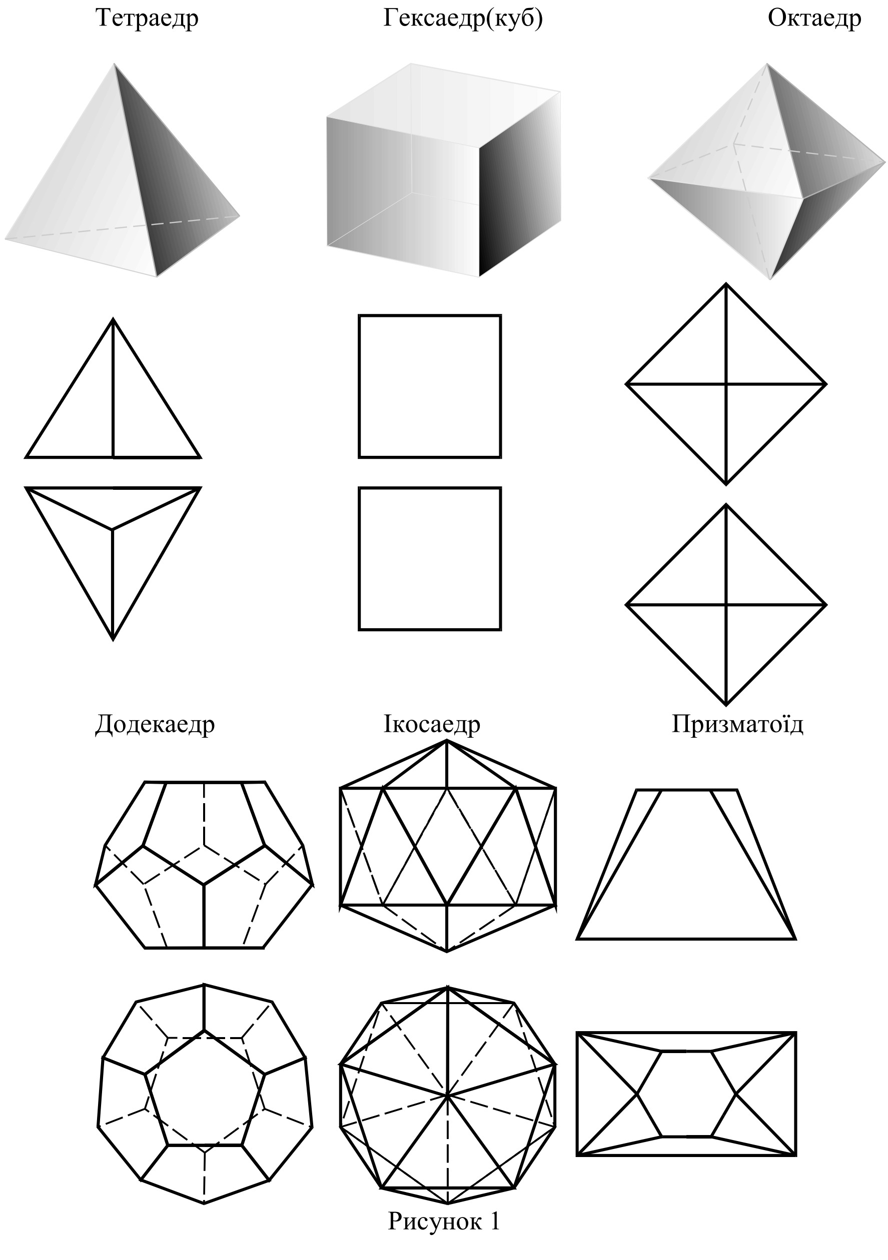

Тетраедр
Гексаедр(куб)
Октаедр
Додекаедр
Ікосаедр
Призматоїд

Рисунок 1

5.1.2 Правильний шестигранник - гексаедр

Він складається з шести рівних квадратів, поєднаних по три біля кожної вершини. Тобто - це куб. Відстані між центрами будь-яких суміжних граней куба рівні між собою.

5.1.3 Правильний восьмигранник - октаедр

Він складається з восьми рівносторонніх та рівних проміж собою трикутників, поєднаних по чотири біля кожної вершини. В октаедр можна вписати куб, що спирається вершинами в центри граней октаедра. Тому куб та октаедр можна називати відповідними (дуальними) многогранниками.

5.1.4 Правильний дванадцятигранник - додекаедр

Він складається з дванадцяти правильних і рівних п'ятикутників, поєднаних по три навколо кожної вершини.

5.1.5 Правильний двадцятигранник - ікосаедр

Він складається з двадцяти рівносторонніх і рівних трикутників, поєднаних по п'ять навколо кожної вершини.

Крім тіл Платона найбільший інтерес становлять піраміди, призми, призматоїди, антипризми.

5.1.6 Призматоїд

Це многогранник (рис. 1), основа якого два многокутники, розташовані у паралельних площинах. Бокові грані призматоїда являють собою трикутники та трапеції, вершини яких являють собою вершини основи.

5.1.7 Антипризма

Це призматоїд (рис. 2), у якого основи - рівні правильні многокутники, але один многокутник повернутий відносно другого навколо нормалі до основ на кут $\alpha = 180/n$, де n - кількість сторін многокутника. На рис. 2 ABCD - верхня основа антипризми, а EFGH - нижня.

Бокові грані - трикутники ABF, BCG, CHD, DEA. Їхня кількість - чотири. Тому чотирикутник ABCD повернутий відносно чотирикутника EFGH на кут $\alpha = 180/4$ і дорівнює 45^0.

5.2 Нерозгортні лінійчаті поверхні

До нерозгортних лінійчатих поверхонь належать: циліндроїд, коноїд та коса площина. Ці поверхні утворюються таким чином. Твірна пряма лінія переміщується по двох напрямних, які не, лежать в одній площині, паралельно до заданої площини. Площина, паралельно до якої в просторі рухається твірна поверхні, називається площиною паралелізму. За площину паралелізму найчастіше приймаються проектуючі площини, або площини рівня.

5.2.1 Циліндроїд

Це поверхня (рис. 3), обидві напрямні якої - криві лінії. У наведеному випадку - це криві **m** та **n** . Площина паралелізму **P** - горизонтально - проектуюча. Тому для побудови каркасу поверхні проводимо горизонтальні проекції твірних l – l_1 паралельно горизонтальному сліду h^0_1 площини **P**. Горизонтальна проекція l_1 цієї твірної перетинає проекції напрямних $\mathbf{n_1}$ та $\mathbf{m_1}$ в точках $\mathbf{1_1}$ та $\mathbf{1'_1}$. За проекційним зв'язком на проекціях $\mathbf{n_2}$ та $\mathbf{m_2}$ знайдемо точки $\mathbf{1_2}$ та $\mathbf{1'_2}$, які поєднаємо між собою. Одержимо фронтальну проекцію $\mathbf{l_2}$ твірної.

Далі проводимо горизонтальні проекції ($\mathbf{2_1 - 2'_1}$; $\mathbf{3_1 - 3'_1}$ ...) інших твірних паралельно до сліду $\mathbf{h^0_1}$ і таким же чином, як для $\mathbf{l_2}$, одержимо фронтальні проекції інших твірних.

У циліндроїдів (рис. 4) напрямні являють собою два кола, одне з яких n належить горизонтальній площині проекцій П1 , а друге - m - фронтально - проектуючій площині. Площина паралелізму - фронтальна площина проекцій П2.

Тому поверхню починають будувати на горизонтальній проекції. Проводимо горизонтальні проекції твірних l1 паралельно до осі X. Визначаємо точки їхнього перетину (наприклад 31 та 3'1) з проекціями твірних. За проекційним зв'язком знайдемо їхні фронтальні проекції 32 та 3'2 , через які пройде фронтальна проекція l2 твірної поверхні. Таким же чином знайдемо проекції інших твірних.

5.2.2 Коноїд

Це поверхня (рис. 5), одна напрямна якої крива, а друга пряма (m та n). Площина паралелізму – фронтально - проектуюча площина P. Тому фронтальні проекції l2 всіх твірних проводимо паралельно до фронтального сліду f 02 площини P. Визначаємо точки перетину 12 та 1'2 лінії l2 з лініями n2 та m2. За проекційним зв'язком на горизонтальних проекціях n1 та m1 знаходимо точки 11 та 1'1 , через які пройде горизонтальна проекція l1 твірної поверхні. Інші твірні знаходимо таким же чином.

У коноїда (рис. 6) одна напрямна - крива n, а друга - горизонтально - проектуюча пряма m , площина паралелізму - горизонтальна площина проекцій $П_1$.

Тому побудову каркасу поверхні починаємо з фронтальної проекції, для чого проводимо лінії l2 паралельно до осі X, визначаємо точки перетину 12 , 1'2 ; 22 , 2'2 ... цих твірних з проекціями напрямних. За проекційним зв'язком знаходимо 11 , 1'1 ; 21 , 2'1 ... - горизонтальні проекції шуканих точок. Слід відмітити, що горизонтальні проекції 1'1 , 2'1 ... 5'1 збігаються з точкою G1, H1, m1 - горизонтальною проекцією прямолінійної напрямної.

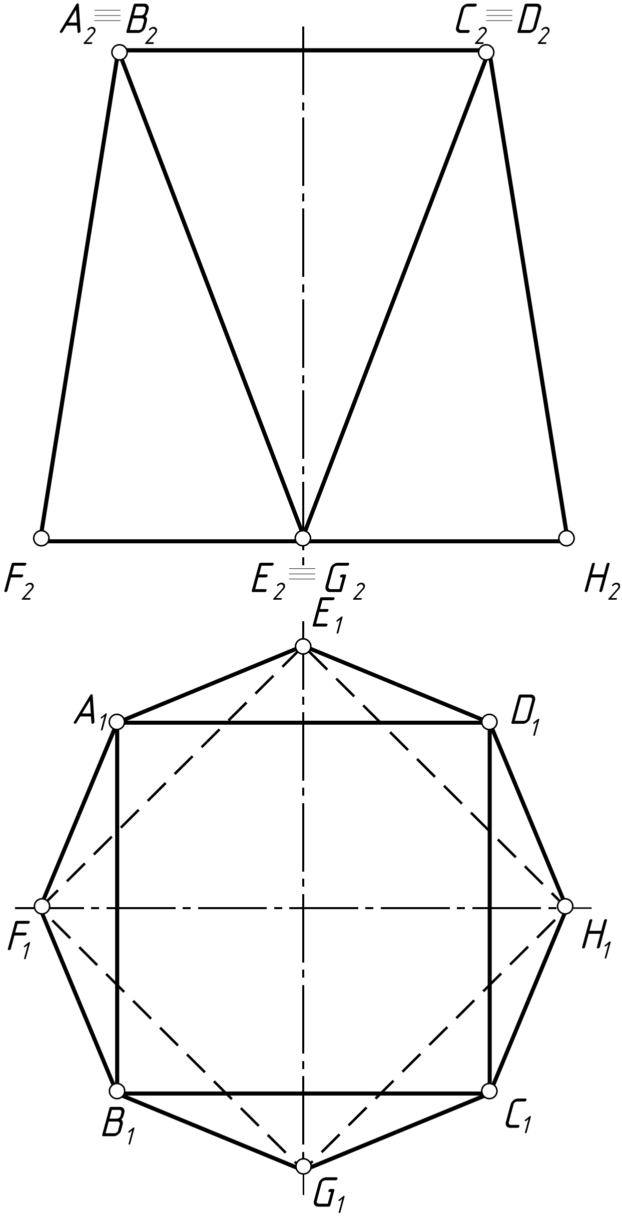


Рисунок 2

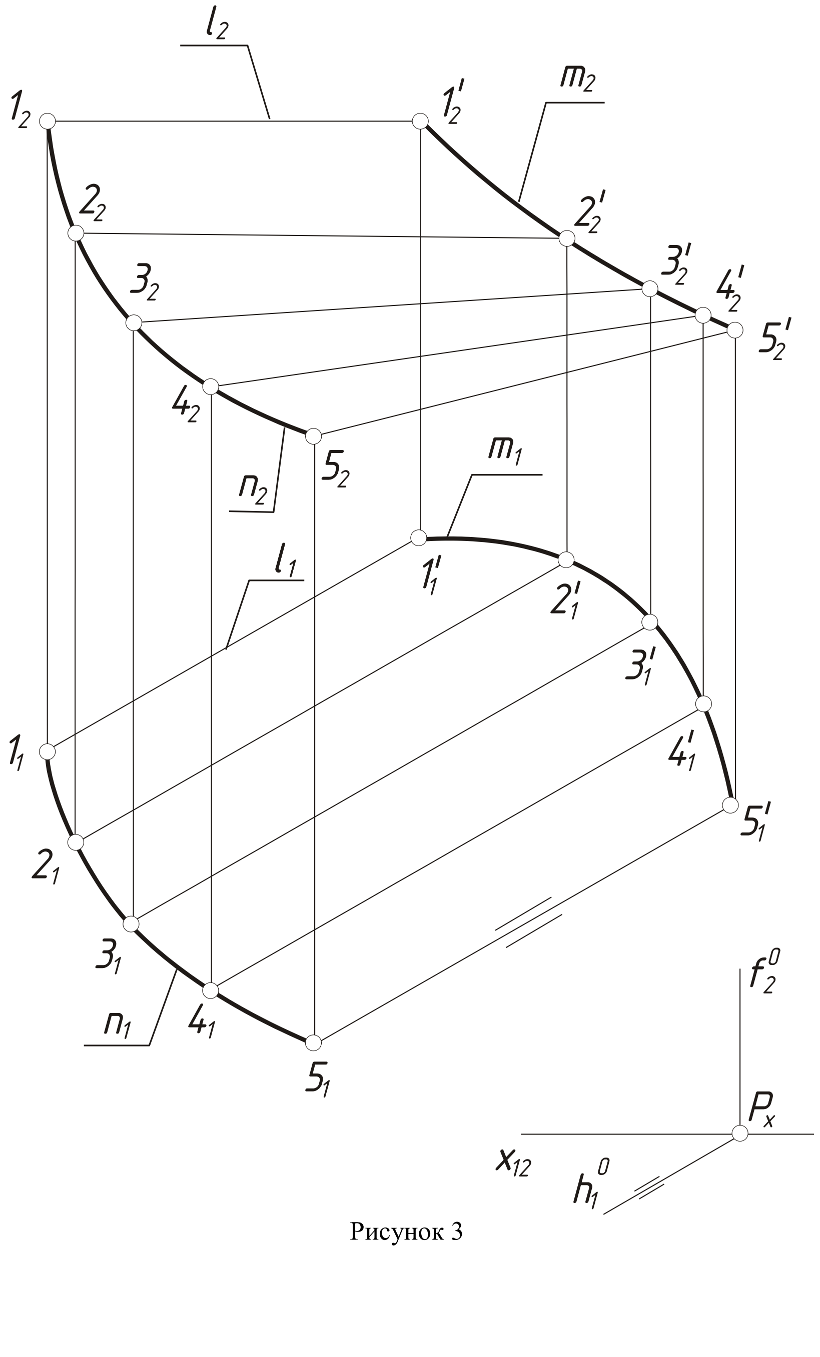
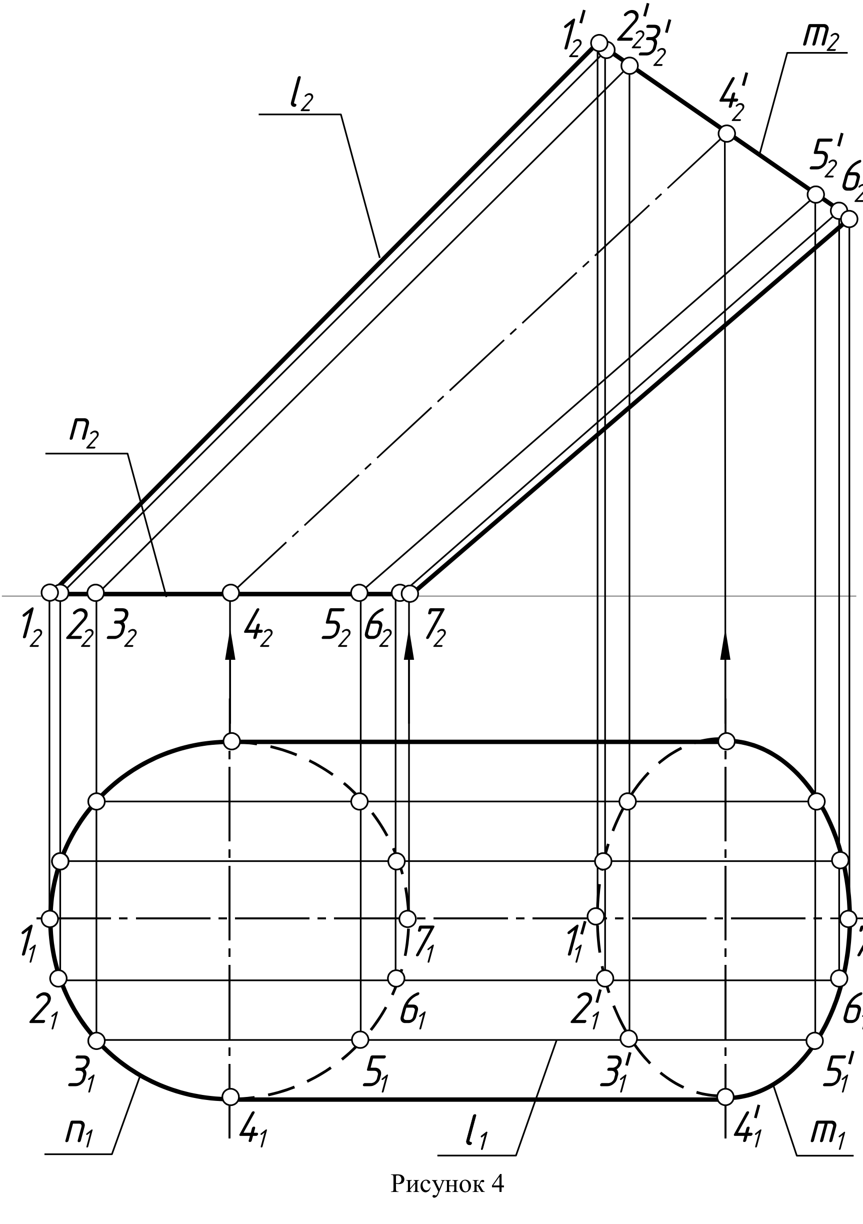
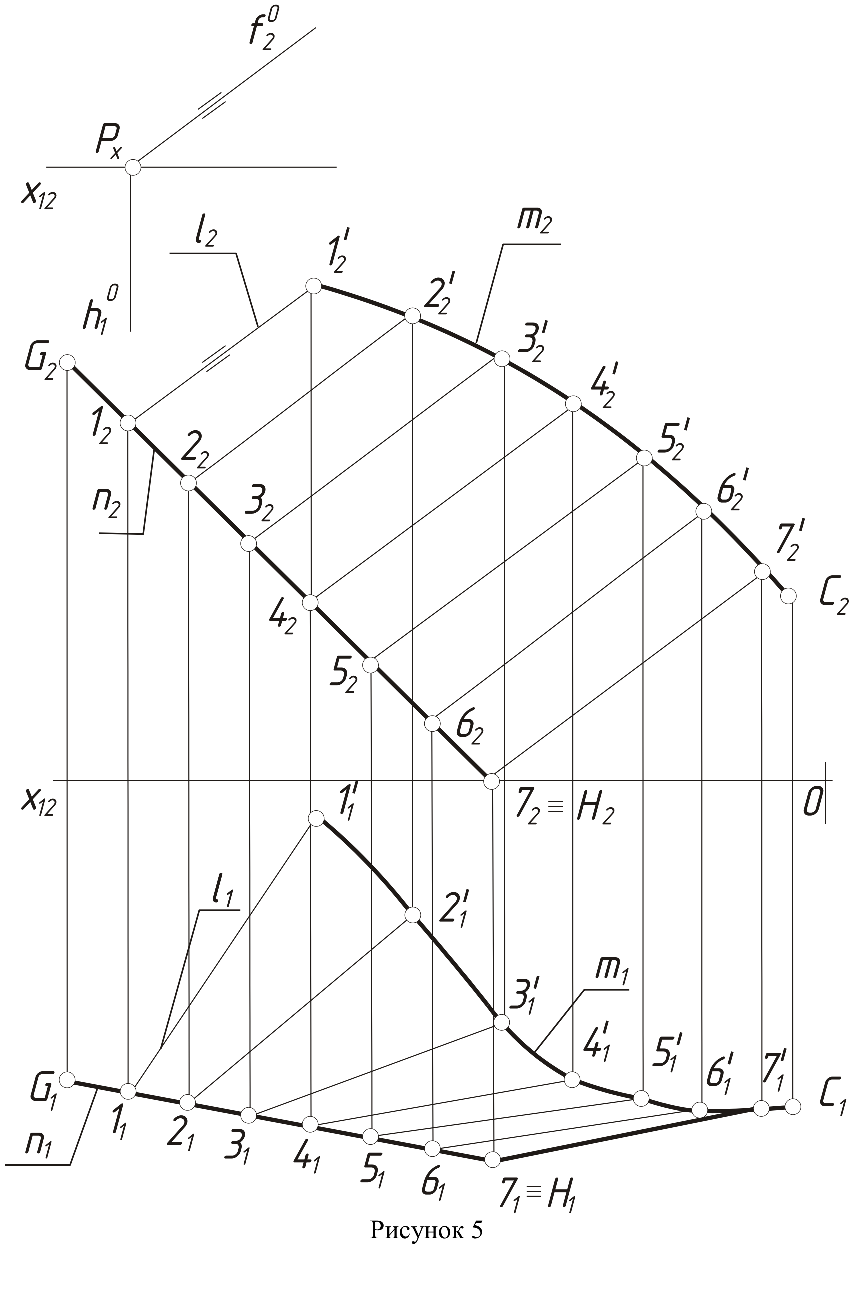

l2
m2
1'2
12
22
2'2
32
3'2
4'2
5'2
42
52
n2
m1
l1
1'1
2'1
3'1
11
4'1
5'1
21
31
n1
41
51
f02
Px
x12
h01

Рисунок 3



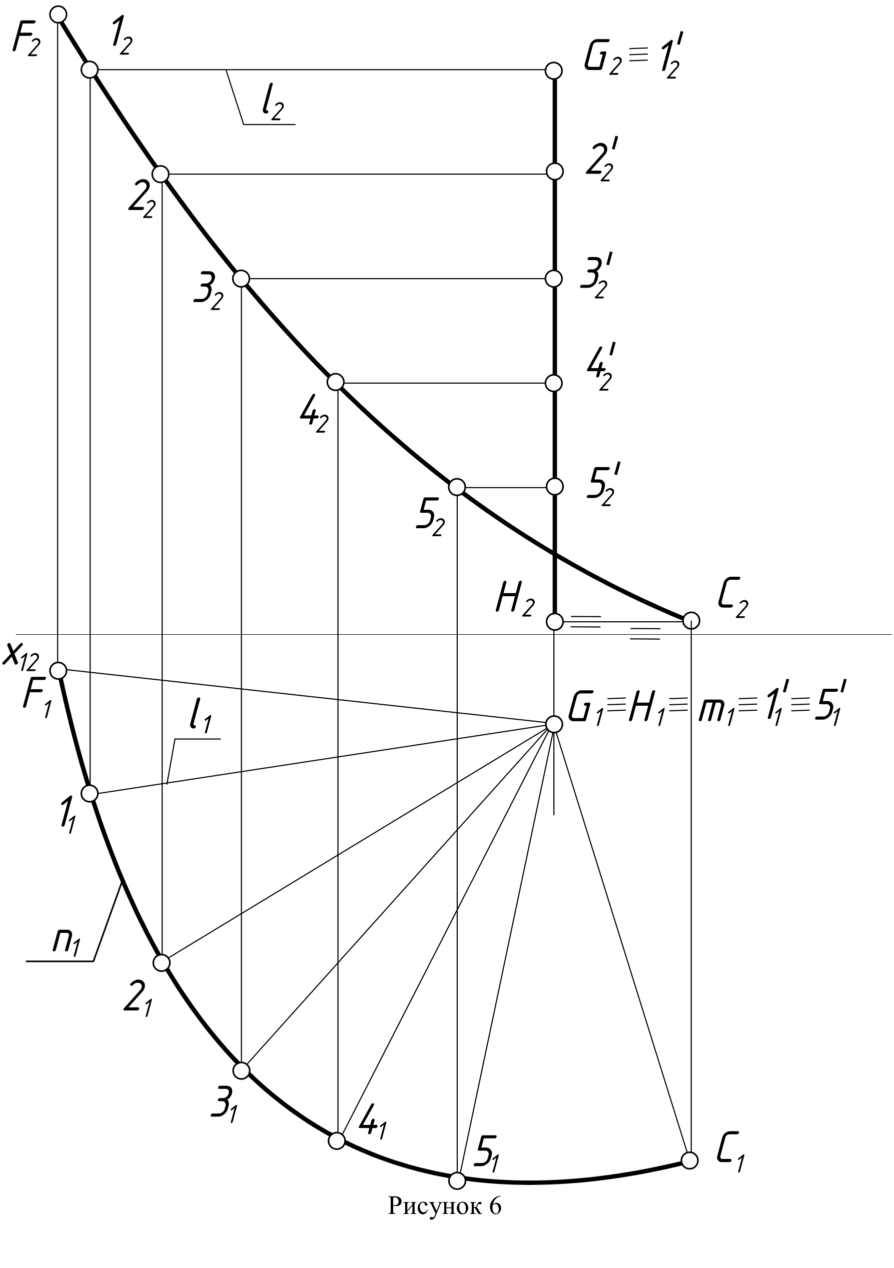
$1_2'$
$2_2'$
$3_2'$
m_2
l_2
$4_2'$
$5_2'$
$6_2'$
$7_2'$
n_2
1_2
2_2
3_2
4_2
5_2
6_2
7_2
1_1
7_1
$1_1'$
$7_1'$
2_1
6_1
$2_1'$
$6_1'$
3_1
5_1
$3_1'$
$5_1'$
n_1
4_1
l_1
$4_1'$
m_1

Рисунок 4



f_2^0
P_x
x_{12}
l_2
$1_2'$
m_2
h_1^0
$2_2'$
$3_2'$
G_2
$4_2'$
1_2
2_2
$5_2'$
n_2
3_2
$6_2'$
$7_2'$
C_2
4_2
5_2
6_2
x_{12}
$1_1'$
$7_2 \equiv H_2$
0
l_1
$2_1'$
m_1
$3_1'$
$4_1'$
$5_1'$
$6_1'$
$7_1'$
G_1
C_1
1_1
2_1
3_1
4_1
5_1
6_1
n_1
$7_1 \equiv H_1$

Рисунок 5



F_2
1_2
$G_2 \equiv 1_2'$
l_2
$2_2'$
2_2
3_2
$3_2'$
$4_2'$
4_2
$5_2'$
5_2
H_2
C_2
x_{12}
F_1
$G_1 \equiv H_1 \equiv m_1 \equiv 1_1' \equiv 5_1'$
l_1
1_1
n_1
2_1
3_1
4_1
5_1
C_1

Рисунок 6

5.2.3 Коса площина (гіперболічний параболоїд)

Вона (рис. 7) утворюється переміщенням прямолінійної твірної l по двох мимобіжних прямих m та n паралельно до площини паралелізму. В наведеному випадку такою є фронтальна площина проекцій П2. Тому горизонтальні проекції твірних l1 проводимо паралельно до осі X.

Визначивши точки перетину цих твірних 11, 1'1; 21, 2'1 ... 61, 6'1 з напрямними n1 та m1, за проекційним зв'язком знайдемо їхні фронтальні проекції 12, 1'2 ; 22, 2'2 ... 62, 6'2, через які проведемо фронтальні проекції твірних l2. Обгинаюча фронтальні проекції твірної є парабола, тому цю поверхню також називають параболоїдом.

5.3 Гвинтова поверхня

5.3.1 Прямий гелікоїд, або гвинтовий коноїд

Ця поверхня (рис. 8) утворюється рухом твірної - відрізка прямої - по двох напрямних, одна з яких є гвинтова лінія **m,** а друга - її вісь **m'** за умови обертання твірної навколо напрямної осі з одночасним ковзанням кінців твірної по обох напрямних.

Тому, по-перше, необхідно побудувати циліндричну гвинтову лінію за заданими параметрами d та t. Далі слід провести твірні гелікоїда паралельно горизонтальній площині проекцій П1 . Тому спочатку проводимо фронтальні проекції твірних паралельно до осі X, які перетинають гвинтову лінію та її вісь відповідно у точках 02, 12, 22... та 0'2, 1'2, 2'2...

За лініями проекційного зв'язку знайдемо горизонтальні проекції вказаних точок, через які пройдуть горизонтальні проекції твірних. Цю поверхню можна віднести до класу гвинтових поверхонь, тому що одна з напрямних являє собою гвинтову лінію.

5.4 Нерозгортні криволінійчаті поверхні

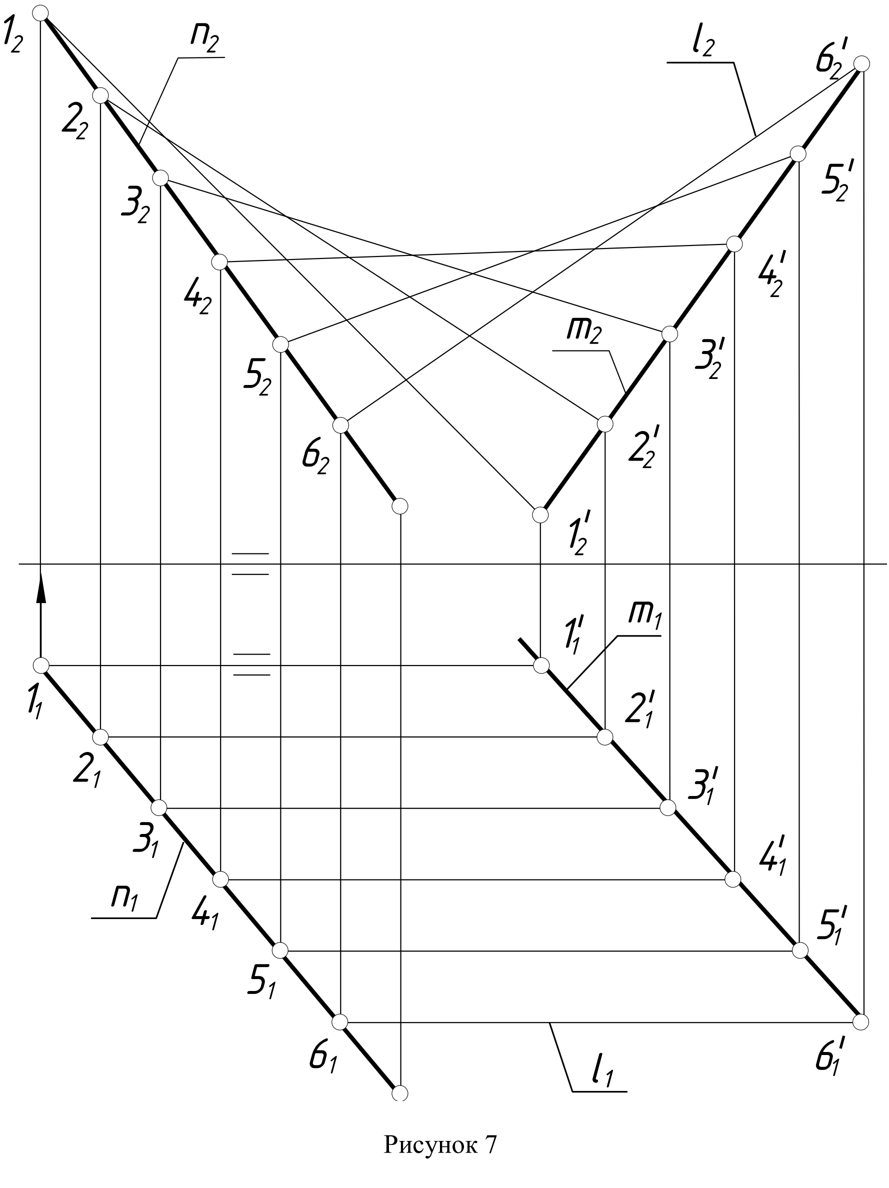
До них можна віднести сферу (кулю), тор, еліпсоїд обертання та ін.

5.4.1 Сфера

Сфера – це поверхня, усі точки якої лежать на однаковій відстані від центра. Сфера може бути отримана обертанням кола навколо його діаметра Відрізок прямої, що сполучає центр сфери із будь-якою її точкою, називається радіусом.

5.4.2 Тор

Тор (рис. 9) утворюється обертанням кола навколо осі, яка лежить у площині твірного кола і не проходить через його центр. Якщо вісь обертання розташована поза колом, то при обертанні утворюється тор-кільце, або колове кільце (форма камери автомобільної шини, або бублика).



1_2
n_2
l_2
$6_2'$
2_2
$5_2'$
3_2
$4_2'$
4_2
m_2
$3_2'$
5_2
$2_2'$
6_2
$1_2'$
$1_1'$
m_1
1_1
$2_1'$
2_1
$3_1'$
3_1
$4_1'$
n_1
4_1
$5_1'$
5_1
6_1
l_1
$6_1'$

Рисунок 7

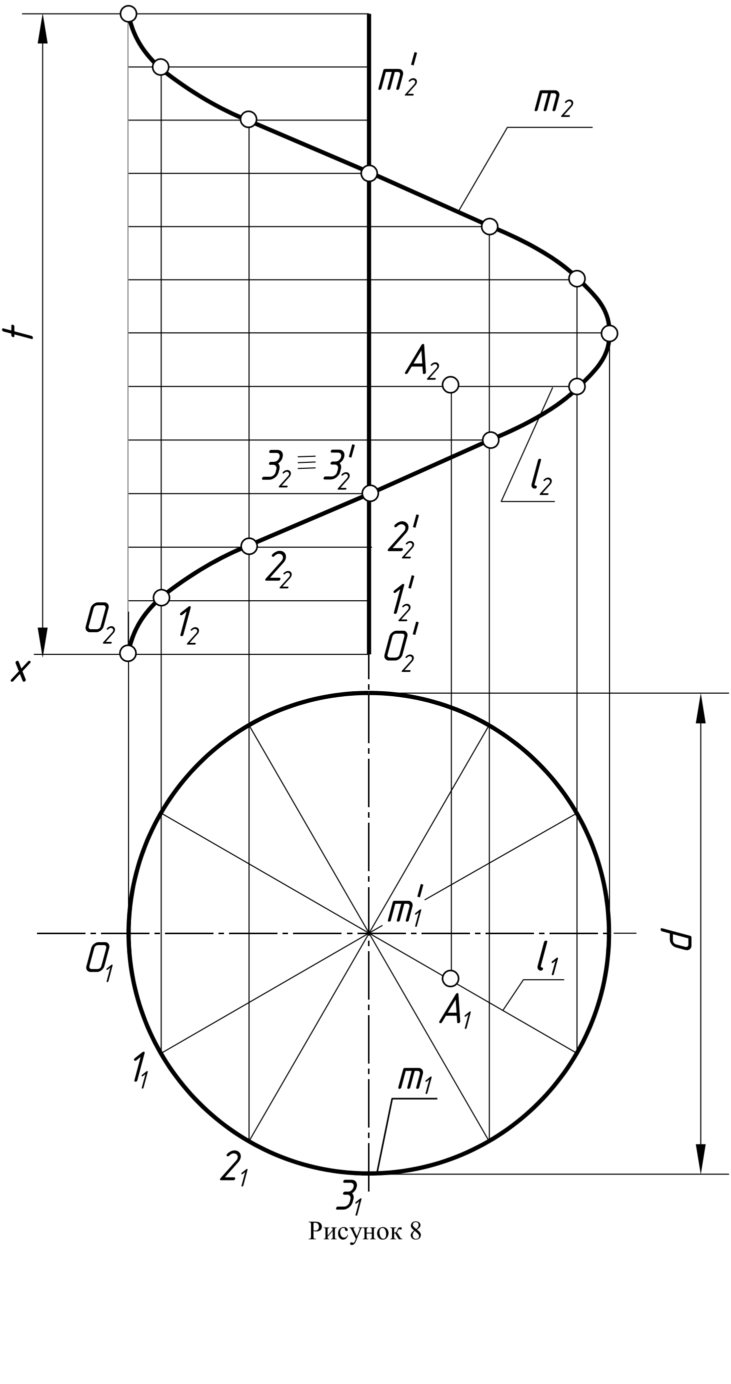


Рисунок 8

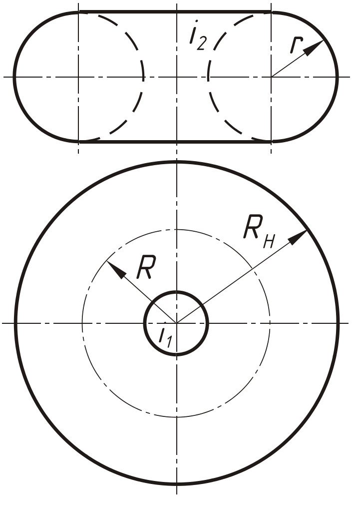


Рисунок 9

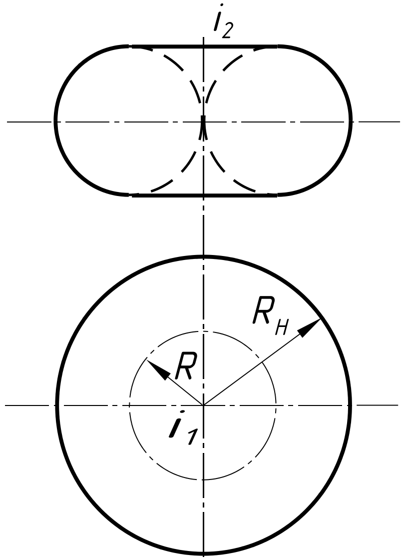


Рисунок 10

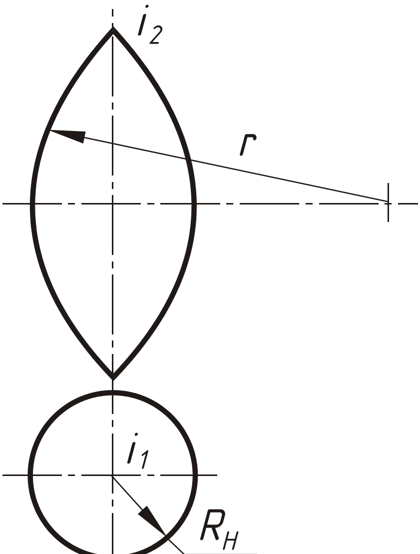


Рисунок 11

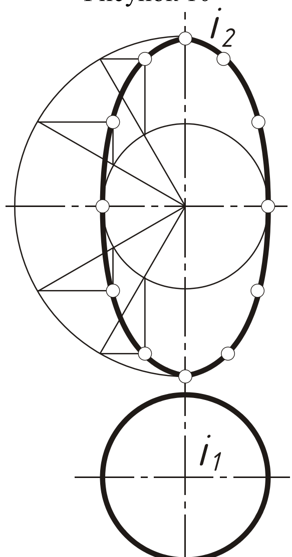


Рисунок 12

Тор-кільце називають також відкритим. Якщо ж вісь дотикається кола або перетинає його, але не проходить через центр, то отримуємо коловий вал, або тор-яблуко (рис. 10). Нарешті тор-лимон (бічна поверхня бочки), (рис. 11). Утворюється від обертання кругового сегмента навколо його хорди. Тор-яблуко називають закритим за умови дотику осі обертання до кола (рис. 10), та самопересічним , якщо вісь перетинає коло. Також самопересічним є тор-лимон (рис. 11). Сфера являє собою окремий випадок торової поверхні.

5.4.3 Еліпсоїд обертання

Утворюється він (рис. 12) обертанням еліпса **ABCD** навколо осі обертання, яка збіглася з великою віссю еліпса. Усі точки еліпса при обертанні опишуть кола з центрами на осі обертання. Зображена поверхня називається "витягнутий" еліпсоїд обертання.

5.5 Розгортні лінійчаті поверхні.

Крім многогранників до цього класу належать конічні (рис. 13а), циліндричні (рис. 13б) поверхні, торс (рис. 13в). Циліндричні та конічні поверхні знайомі студентам з шкільного курсу геометрії. Торс (рис. 13в) – це розгортна поверхня, утворена безперервним рухом прямолінійної твірної, яка у всіх своїх положеннях є дотичною до деякої просторової напрямної кривої. Напрямна крива **m** називається ребром повороту. Якщо ребро повороту – плоска крива, торс перетворюється у площину. Якщо ребро повороту перетворюється у точку, торс перетворюється у конічну поверхню. Якщо ця точка віднесена до нескінченності, торс перетворюється на циліндричну поверхню.

6. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПОВЕРХНЕЮ

Для побудови точок перетину прямої з поверхнею, у загальному випадку, необхідно провести через пряму допоміжну площину та побудувати фігуру перерізу. Точки, в яких задана пряма перетинається з контуром фігури перерізу, будуть шуканими точками перетину з поверхнею. Далі наведемо деякі приклади розв'язання поданої задачі.

6.1 Перетин прямої з поверхнею многогранника – антипризми

Через заданий відрізок прямої **AB** проведемо фронтально-проектуючу (рис. 14) площину **P.** $(\mathbf{P_2 \equiv f^0_2 \equiv A_2B_2})$**.** Ця площина перетинає поверхню многогранника по многокутнику, вершини цього многокутника – точки **C, D, E, G, H, F** є точками перетину ребер антипризми з допоміжною площиною. Точки перетину **K** та **L** $(\mathbf{K_1, L_1; K_2, L_2})$ прямої **AB** зі сторонами **CF** та **GH** фігури перерізу є шуканими.

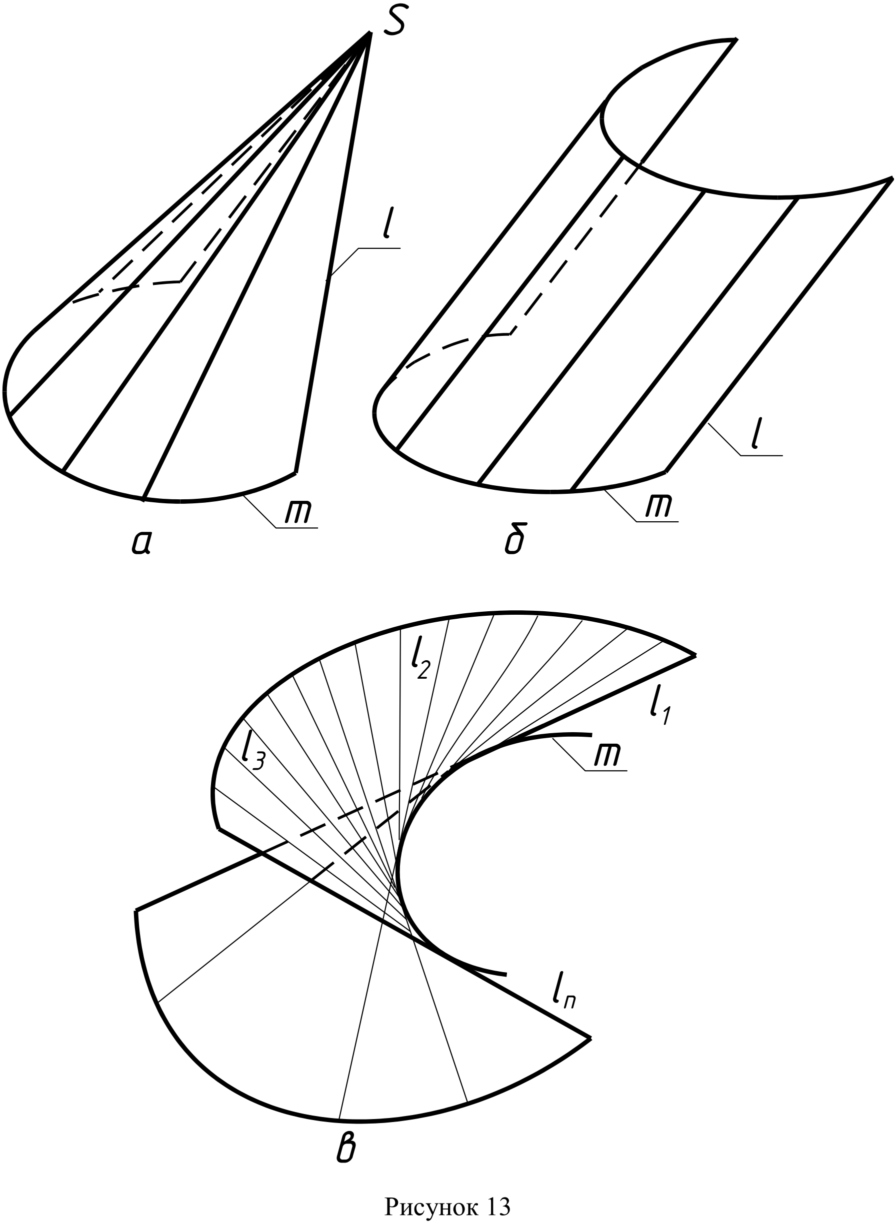


Рисунок 13

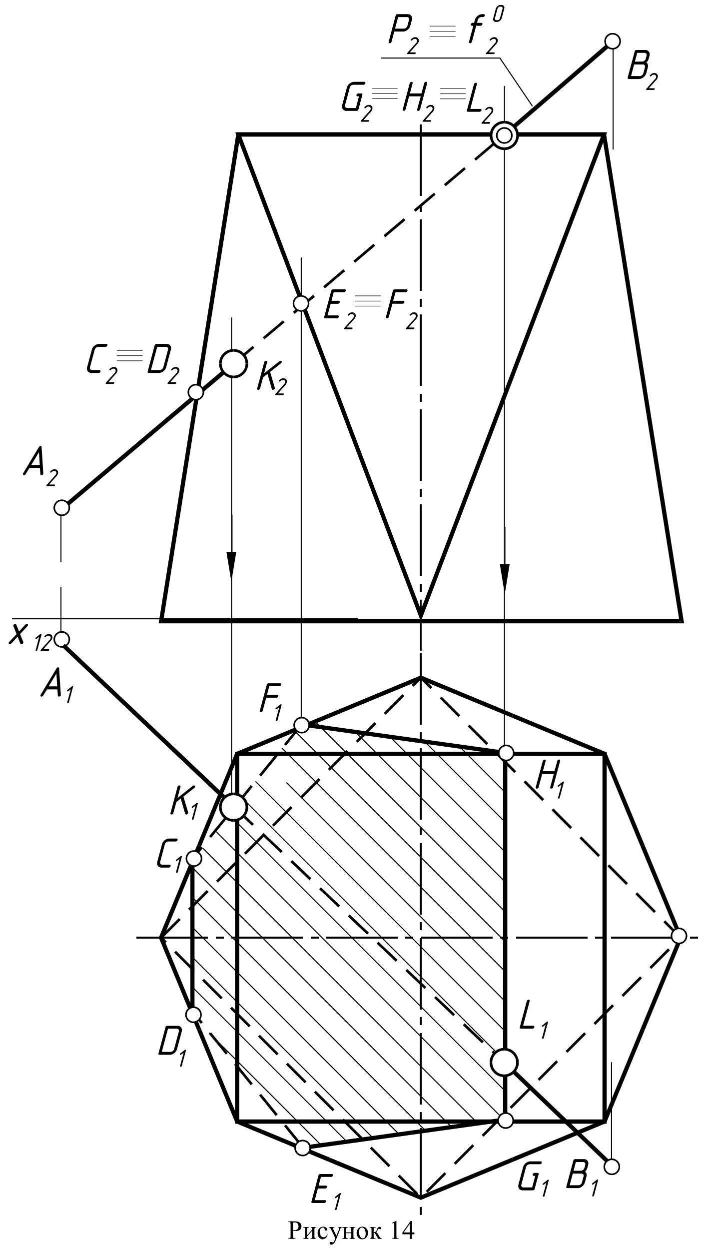


Рисунок 14

6.2 Перетин прямої з нерозгортними лінійчатими поверхнями

Алгоритм розв'язання задачі такий же, як у випадку з многогранником.

6.2.1 Перетин прямої з поверхнею циліндроїда

Через відрізок **AB** проводимо горизонтально-проектуючу площину **Q** ($\mathbf{h^0{}_1 \equiv A_1B_1}$) та знаходимо фігуру перетину цієї площини з поверхнею циліндроїда (рис. 15).

6.2.2 Перетин прямої з поверхнею коноїда

Алгоритм розв'язання задачі такий же , як у випадку циліндроїда (п. 6.2.1, рис. 15). Побудова каркасу поверхні наведена у п. 5.2.2, рис. 5 та рис. 6.

6.2.3 Перетин прямої з поверхнею косої площини.

Алгоритм розв'язання задачі (рис. 17) такий же, як у випадку циліндроїда (п. 6.2.1, рис. 15). Побудова каркасу поверхні наведена у п. 5.2.3, рис. 7.

6.3 Перетин прямої з гвинтовою поверхнею

6.3.1 Перетин прямої з поверхнею прямого гелікоїда

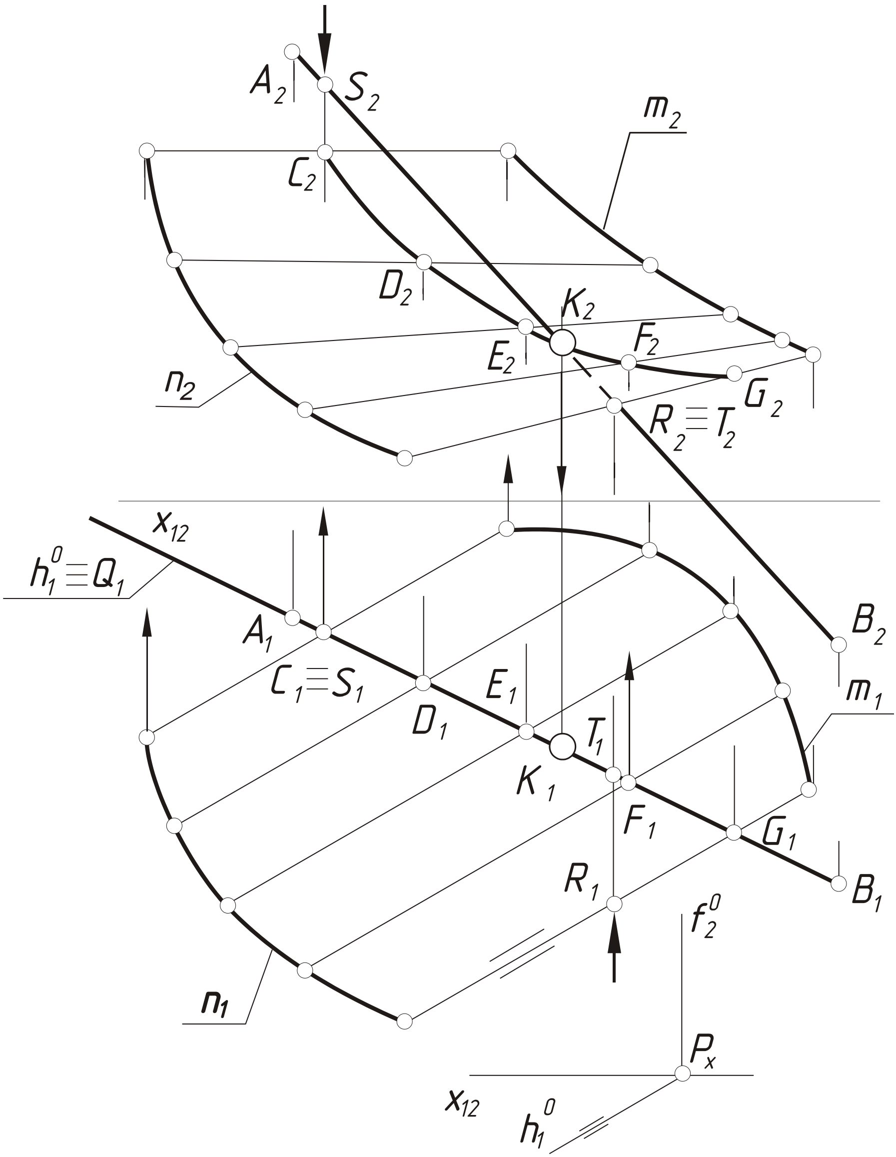
Перш за все треба побудувати задану поверхню за прикладом, що наведений у п. 5.3.1, рис. 8. Далі, як і у попередніх випадках, через пряму **AB** проводимо допоміжну січну фронтально-проектуючу площину **P** ($\mathbf{P_2 \equiv f^0{}_2 \equiv A_2B_2}$). Знаходимо (рис. 18) горизонтальні проекції 13_1, 14_1, ... 21_1 точок перетину площини з твірними, з'єднуємо ці точки плавною лінією. Точки перетину горизонтальної проекції $\mathbf{A_1B_1}$ прямої **AB** з фігурою перетину – точки $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{L_1}$, $\mathbf{C_1}$ – горизонтальні проекції точок перетину прямої з поверхнею. Фронтальні проекції $\mathbf{K_2}$, $\mathbf{L_2}$, $\mathbf{C_2}$ цих точок знаходимо за проекційним зв'язком.

6.3.2 Перетин прямої з нерозгортними криволінійчатими поверхнями

У цьому розділі розглянемо перетин прямої з поверхнями сфери, еліпсоїда обертання, тора. Щоб спростити графічні операції, бажано застосувати перетворення креслення таким чином, щоб допоміжні криві являли, де це можливо, коло.

6.3.3 Перетин прямої з поверхнею сфери

Перш за все, через пряму **AB** проводимо допоміжну горизонтально-проектуючу площину **Σ** ($\mathbf{\Sigma_1 \equiv A_1B_1}$), яка перетинає задану поверхню по колу. Але на фронтальну площину проекцій $\mathbf{\Pi_2}$ це коло проектується у вигляді еліпса. Як було сказано, доцільно застосовувати перетворення креслення, щоб фігура перетину сфери площиною **Σ** проектувалась в дійсну величину, тобто в коло. Для цього застосуємо один з двох методів перетворення.



A2
S2
m2
C2
D2
K2
E2
F2
n2
G2
R2≡T2
x12
h1^0≡Q1
A1
B2
C1≡S1
E1
D1
T1
m1
K1
F1
G1
R1
B1
f2^0
n1
Px
x12
h1^0

Рисунок 15

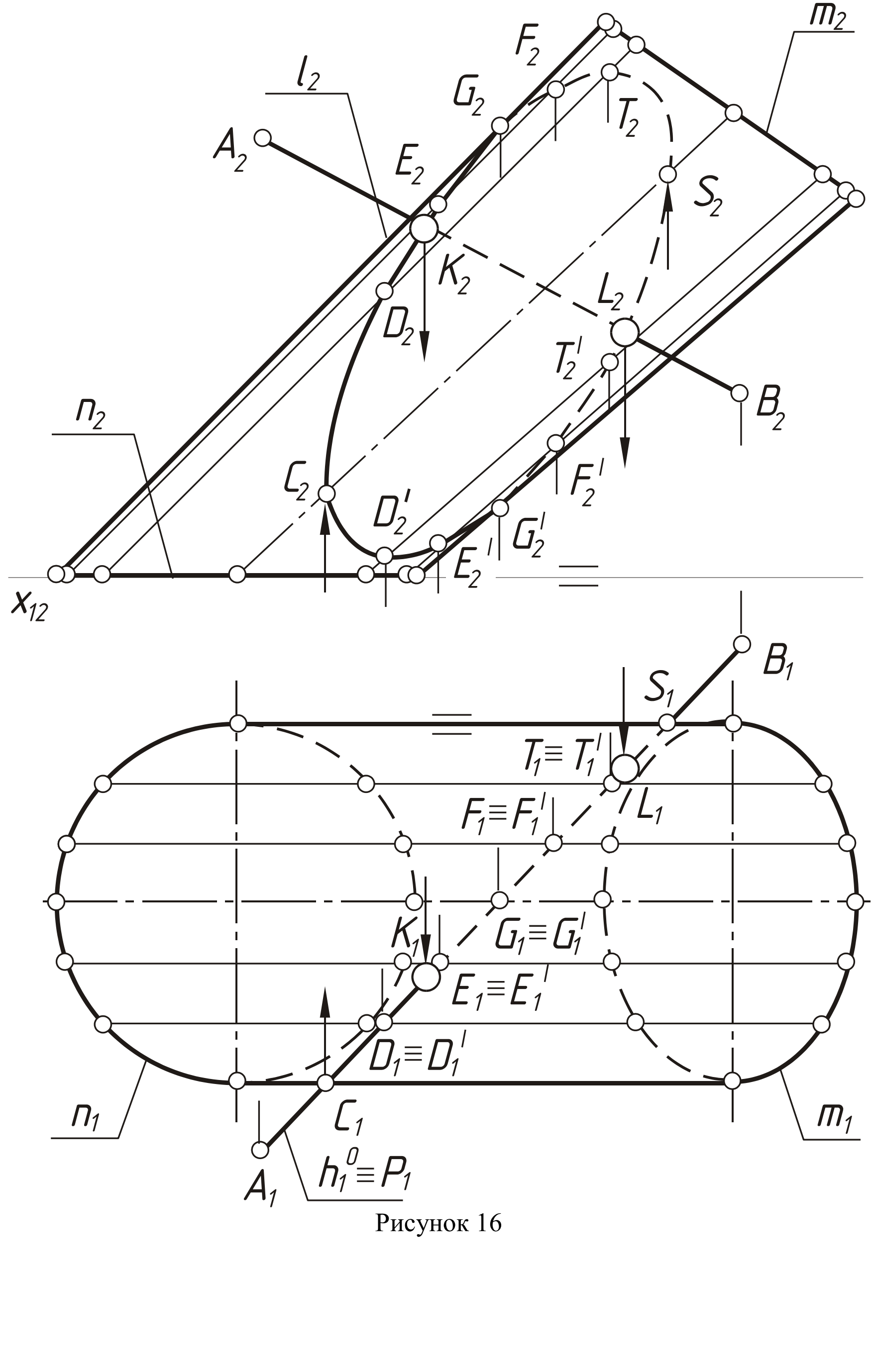

m2
F2
l2
G2
T2
A2
E2
S2
K2
L2
D2
T'2
B2
n2
F'2
C2
D'2
G'2
E'2
x12
B1
S1
T1≡T'1
L1
F1≡F'1
K1
G1≡G'1
E1≡E'1
D1≡D'1
n1
C1
m1
A1
h0 1≡P1

Рисунок 16

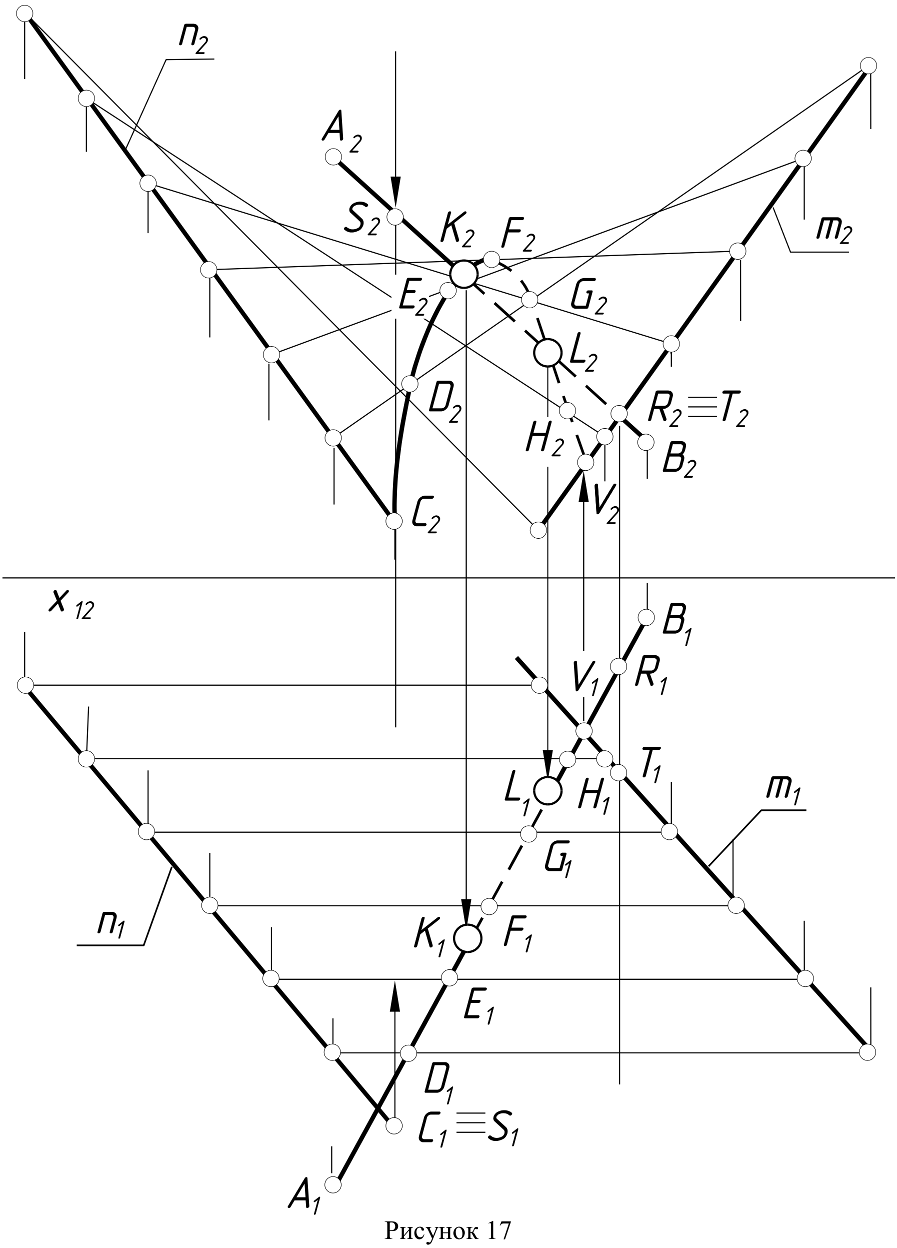
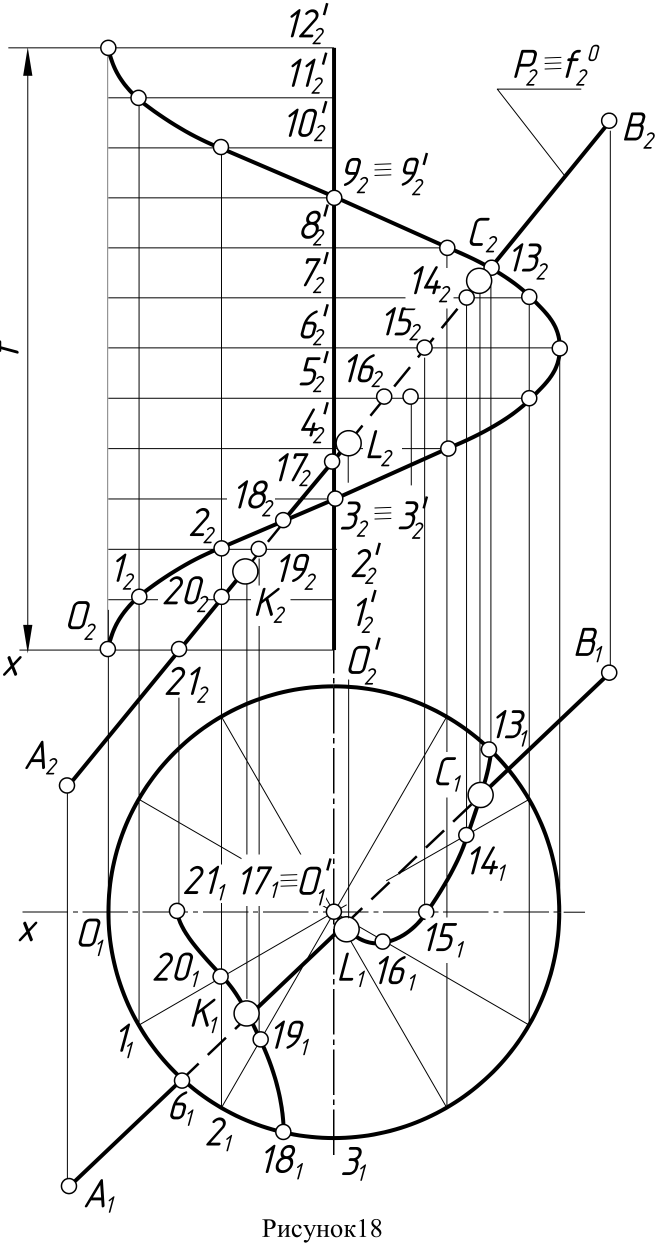

n2
A2
S2
K2
F2
m2
E2
G2
L2
D2
R2≡T2
H2
B2
V2
C2
x12
B1
V1
R1
T1
L1
H1
m1
G1
n1
K1
F1
E1
D1
C1≡S1
A1

Рисунок 17



$12_2'$
$11_2'$
$10_2'$
$9_2 \equiv 9_2'$
$8_2'$
$7_2'$
$6_2'$
$5_2'$
$4_2'$
$3_2 \equiv 3_2'$
$2_2'$
$1_2'$
O_2'
$P_2 \equiv f_2^0$
B_2
C_2
13_2
14_2
15_2
16_2
L_2
17_2
18_2
2_2
1_2
19_2
20_2
K_2
O_2
21_2
t
x
A_2
B_1
13_1
C_1
14_1
21_1
$17_1 \equiv O_1'$
x
O_1
15_1
L_1
16_1
20_1
K_1
19_1
1_1
6_1
2_1
18_1
3_1
A_1

Рисунок18

1 Застосування методу заміни площин проекцій (рис. 19). Замінено площину проекцій $\mathbf{\Pi_2}$ на $\mathbf{\Pi_4}$, яка буде паралельною до площини $\mathbf{\Sigma}$. На кресленні нова вісь проекцій $\mathbf{X_{14}}$ // $\mathbf{\Sigma}$.

На цю площину проекцій коло, яке має радіус r, проектується в дійсну величину. Щоб знайти новий центр кола $\mathbf{O_4}$ через точку $\mathbf{O_1}$ проводимо перпендикуляр до осі $\mathbf{X_{14}}$, на якому відкладаємо координату центра $\mathbf{Z_0}$, яку заміряємо у старій системі $\mathbf{\Pi_2}$ / $\mathbf{\Pi_1}$. Також знаходимо нові фронтальні проекції $\mathbf{A_4}$ та $\mathbf{B_4}$ кінців відрізка **AB**, користуючись координатами **Z** цих точок, заміряних на площині проекцій $\mathbf{\Pi_2}$.

Точки перетину відрізка $\mathbf{A_4B_4}$ з колом радіуса r визначать $\mathbf{K_4}$ та $\mathbf{L_4}$ – нові фронтальні проекції точок перетину. За проекційним зв'язком з $\mathbf{K_4}$ та $\mathbf{L_4}$ знайдемо горизонтальні проекції $\mathbf{K_1}$ та $\mathbf{L_1}$ шуканих точок, а далі їхні фронтальні проекції $\mathbf{K_2}$ та $\mathbf{L_2}$.

2 Застосування метода обертання навколо проектуючої прямої (рис. 20).

Як і у попередньому випадку, проводимо через пряму **AB** горизонтально - проектуючу площину $\mathbf{\Sigma}$ **(**$\mathbf{\Sigma_1}$**,** $\mathbf{A_1B_1}$**)** та обернемо її навколо осі, що перпендикулярна до площини проекцій $\mathbf{\Pi_1}$ та проходить через центр кулі **(**$\mathbf{i_1 \equiv O_1}$**)** так, щоб площина $\mathbf{\Sigma}$ стала паралельна до $\mathbf{\Pi_2}$**.** На кресленні $\mathbf{\Sigma_1}$ **//** $\mathbf{X_{12}}$**.** Тоді фігура перетину – коло, що має діаметр $\mathbf{2_13_1}$, проектується на площину $\mathbf{\Pi_2}$ в дійсну величину. Горизонтальні проекції точок $\mathbf{A_1}$ та $\mathbf{B_1}$ обертаються разом з площиною навколо центра $\mathbf{i_1 \equiv O_1}$ та після обертання займуть положення $\bar{\mathbf{A}}_1$ та $\bar{\mathbf{B}}_1$**.** Їхні фронтальні проекції в цей час будуть переміщуватись по прямих, паралельних до осі $\mathbf{X_{12}}$**,** до відновлення проекційного зв'язку з $\bar{\mathbf{A}}_1$ та $\bar{\mathbf{B}}_1$**,** тобто займуть положення $\bar{\mathbf{A}}_2$ та $\bar{\mathbf{B}}_2$. Точки перетину відрізка $\bar{\mathbf{A}}_2\bar{\mathbf{B}}_2$ з колом, що має діаметр $\bar{\mathbf{2}}_2$ **-** $\bar{\mathbf{3}}_2$**,** будуть точками перетину $\bar{\mathbf{K}}_2$ та $\bar{\mathbf{L}}_2$ прямої **AB** у новому положенні. Зворотним проектуванням знайдено точки $\mathbf{K_2}$ та $\mathbf{L_2}$**,** а також їхні горизонтальні проекції $\mathbf{K_1}$ та $\mathbf{L_1}$ точок перетину прямої **AB** зі сферою**.**

6.3.4 Перетин прямої з еліпсоїдом обертання

Перш за все, через пряму **AB** проводимо горизонтально-проектуючу площину $\mathbf{\Sigma}$ (рис. 21). Задана пряма і допоміжна площина проходить через центр і вісь еліпсоїда і перетинає його по такому ж еліпсу, як і контур поверхні, зображений на фронтальній проекції. Далі, як у випадку сфери, застосуємо перетворення (обертання навколо проектуючої прямої або заміни площин проекцій), що значно спростить розв'язання задачі. У наведеному прикладі (рис. 21) площину $\mathbf{\Sigma}$ обертаємо навколо вертикальної осі еліпсоїда, щоб вона стала паралельно площині проекцій $\mathbf{\Pi_2}$. Тоді її горизонтальна проекція $\bar{\mathbf{\Sigma}}_1$ стане паралельною осі $\mathbf{X_{12}}$, а відрізок $\mathbf{A_1B_1}$ також розташується паралельно до осі $\mathbf{X_{12}}$**,** тобто перейде у відрізок $\bar{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{B}}_1$**.**

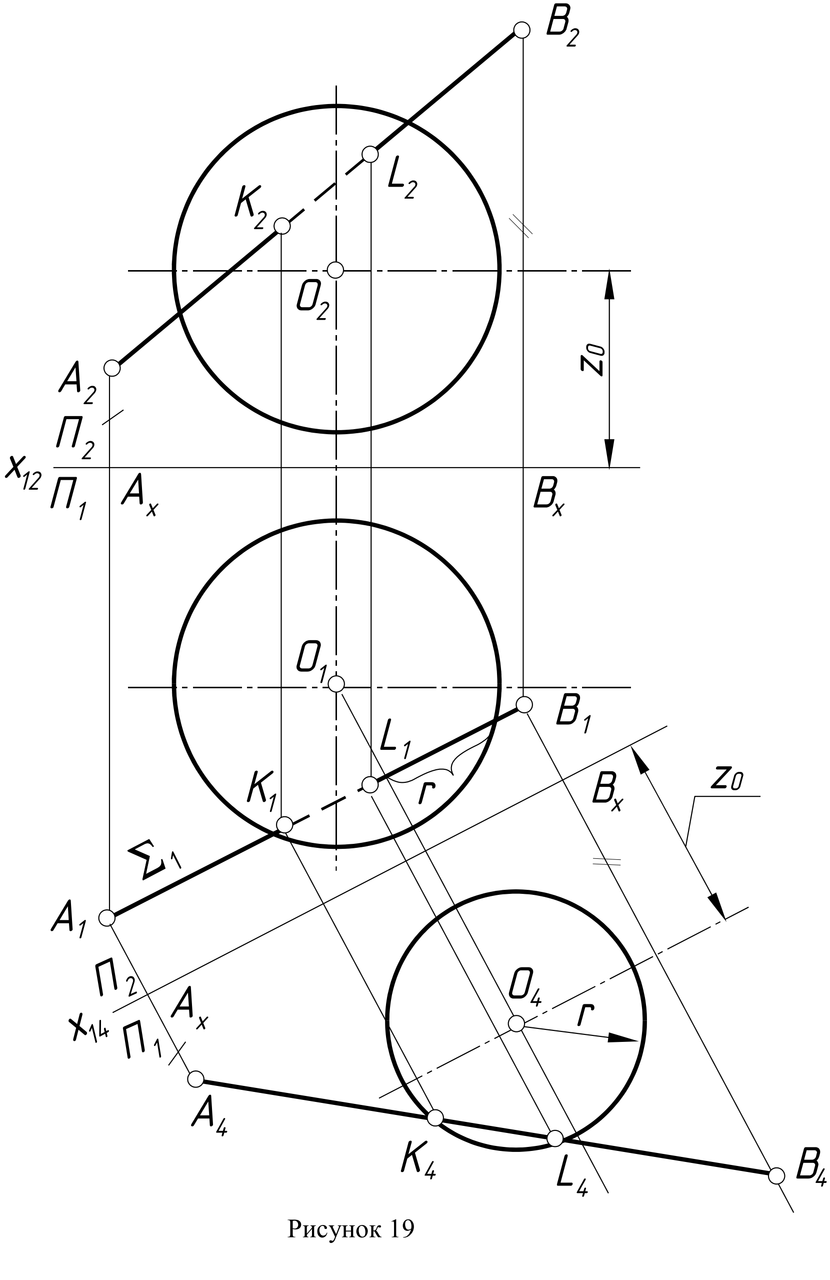
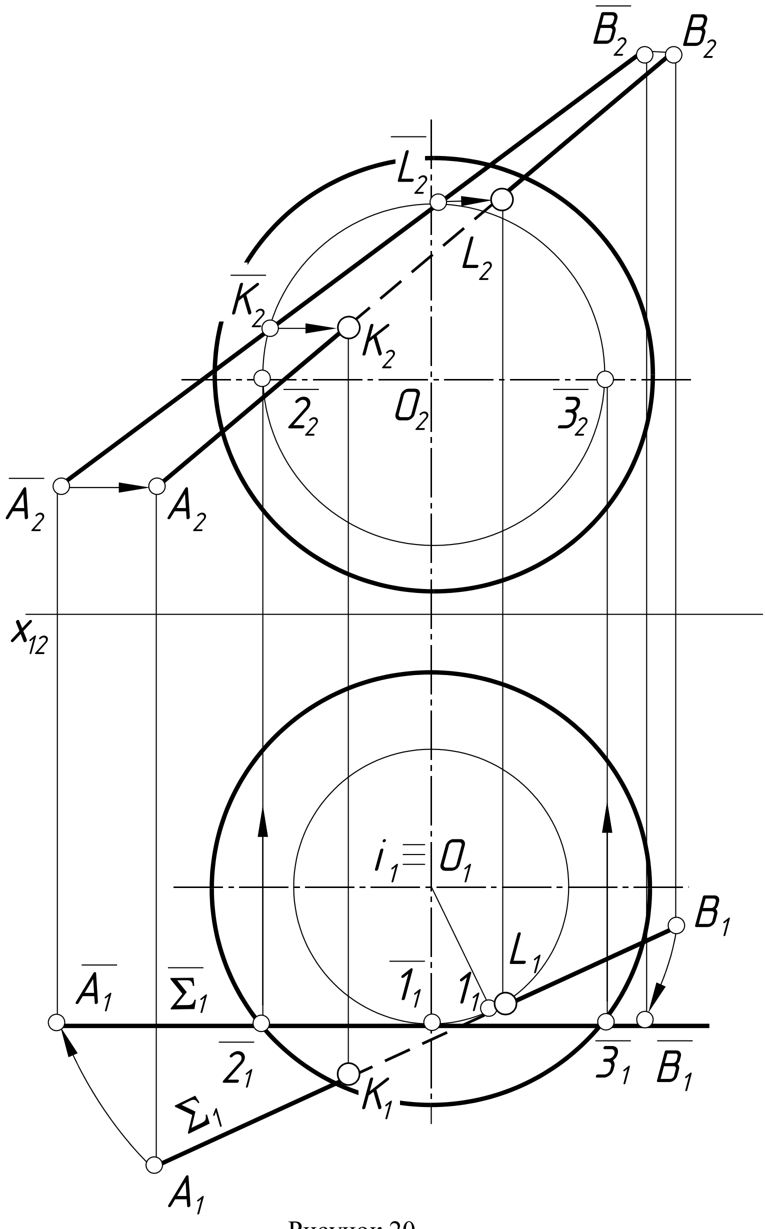
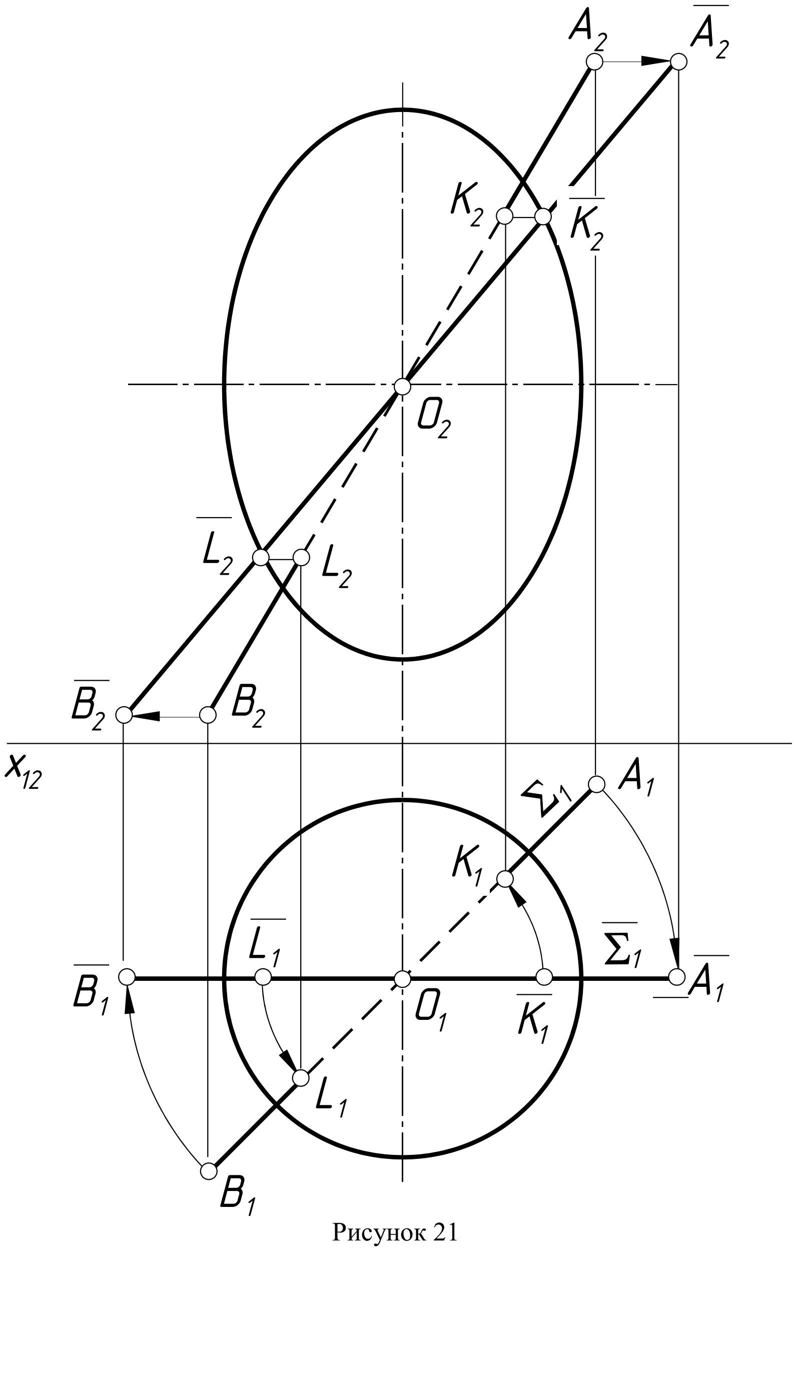

B2
L2
K2
O2
z0
A2
П2
x12
П1
Ax
Bx
O1
B1
L1
K1
r
Bx
z0
Σ1
A1
П2
Ax
x14
П1
O4
r
A4
K4
L4
B4

Рисунок 19



$\overline{B}_2$
B_2
$\overline{L}_2$
L_2
$\overline{K}_2$
K_2
$\overline{2}_2$
O_2
$\overline{3}_2$
$\overline{A}_2$
A_2
x_{12}
$i_1 \equiv O_1$
B_1
L_1
$\overline{A}_1$
$\overline{\Sigma}_1$
$\overline{1}_1$
1_1
$\overline{2}_1$
$\overline{3}_1$
$\overline{B}_1$
K_1
Σ_1
A_1

Рисунок 20



A_2
$\overline{A_2}$
K_2
$\overline{K_2}$
O_2
$\overline{L_2}$
L_2
$\overline{B_2}$
B_2
x_{12}
A_1
Σ_1
K_1
$\overline{L_1}$
$\overline{\Sigma_1}$
$\overline{B_1}$
O_1
$\overline{K_1}$
$\overline{A_1}$
L_1
B_1

Рисунок 21

Фронтальні проекції точок $\mathbf{A_2}$ та $\mathbf{B_2}$ будуть переміщуватись паралельно до осі $\mathbf{X_{12}}$ до поновлення проекційного зв'язку з точками $\overline{\mathbf{A}}_1$ та $\mathbf{B_1}$ і тепер будуть позначатись, як $\overline{\mathbf{A}}_2$ та $\overline{\mathbf{B}}$.Точки перетину $\overline{\mathbf{K}}_2$ та $\overline{\mathbf{L}}_2$ відрізка прямої $\overline{\mathbf{A}}_2\overline{\mathbf{B}}_2$ з фронтальним контуром еліпсоїда будуть перетвореними точками перетину. Зворотним проектуванням знайдено дійсне положення $\mathbf{K_2}$, $\mathbf{L_2}$ та $\mathbf{K_1}$ та $\mathbf{L_1}$ **–** проекції точок перетину. Порядок графічних операцій позначено на кресленні стрілками.

6.3.5 Перетин прямої з тором

Задана пряма **AB** (рис. 22) перетинає вісь тору. Тому фронтально – проектуюча площина, що проведена через пряму **AB,** перетинає тор по колу радіуса r, тобто по твірній. Площина цієї твірної нахилена до площини $\mathbf{\Pi_1}$ і буде проектуватись у вигляді еліпса. Щоб спростити графічні операції, як у попередньому прикладі, застосуємо метод обертання навколо осі тора (у цьому випадку вісь тора фронтально - проектуюча).

Обертання проводимо до суміщення допоміжної площини з горизонтальною площиною проекцій. У цьому разі після обертання фронтальні проекції площини $\mathbf{\Sigma_2}$ та відрізка прямої $\mathbf{A_2B_2}$ збіжаться з віссю $\mathbf{X_{12}}$. Їхнє позначення стане $\overline{\mathbf{\Sigma}}_2 \equiv \mathbf{X_{12}}$ та $\overline{\mathbf{A}}_2\overline{\mathbf{B}}_2 \equiv \mathbf{X_{12}}$.

Горизонтальні проекції точок $\mathbf{A_1}$ та $\mathbf{B_1}$ відповідно перейдуть у точки $\overline{\mathbf{A}}_1$ та $\overline{\mathbf{B}}_1$. Коло, по якому площина перетинає тор, суміститься з лівим твірним колом тора, у перетині з яким прямої $\overline{\mathbf{A}}_1\overline{\mathbf{B}}_1$ знайдуться точки $\overline{\mathbf{K}}_1$ та $\overline{\mathbf{L}}_1$**.** Зворотним проектуванням (на кресленні це позначено стрілками) знайдемо горизонтальні $\mathbf{K_1}$ та $\mathbf{L_1}$, а потім і фронтальні $\mathbf{K_2}$ та $\mathbf{L_2}$ проекції точок перетину прямої з поверхнею тора.

6.4 Перетин прямої з розгорненими лінійчатими поверхнями

У цих випадках треба застосувати таку допоміжну січну площину, яку б перетинали задані поверхні по простих лініях – по колу чи двох прямих. Такою площиною може бути площина не обов'язково особливого, але і загального положення.

6.4.1 Перетин прямої з похилим циліндром

Щоб допоміжна січна площина, яку треба провести через задану пряму **AB** (рис. 23), перетинала заданий циліндр по прямих – твірних, необхідно щоб в ній була пряма, паралельна до осі (або контурних твірних) циліндра. Тому план розв'язання задачі буде такий:

1. Вибираємо на прямій **AB** довільну точку **C** $(\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2})$**.**
2. Проводимо через цю точку **C** пряму **m**, що паралельна осі циліндра ($\mathbf{m_2}$ паралельна фронтальній проекції, а $\mathbf{m_1}$ паралельна горизонтальній проекції осі циліндра).

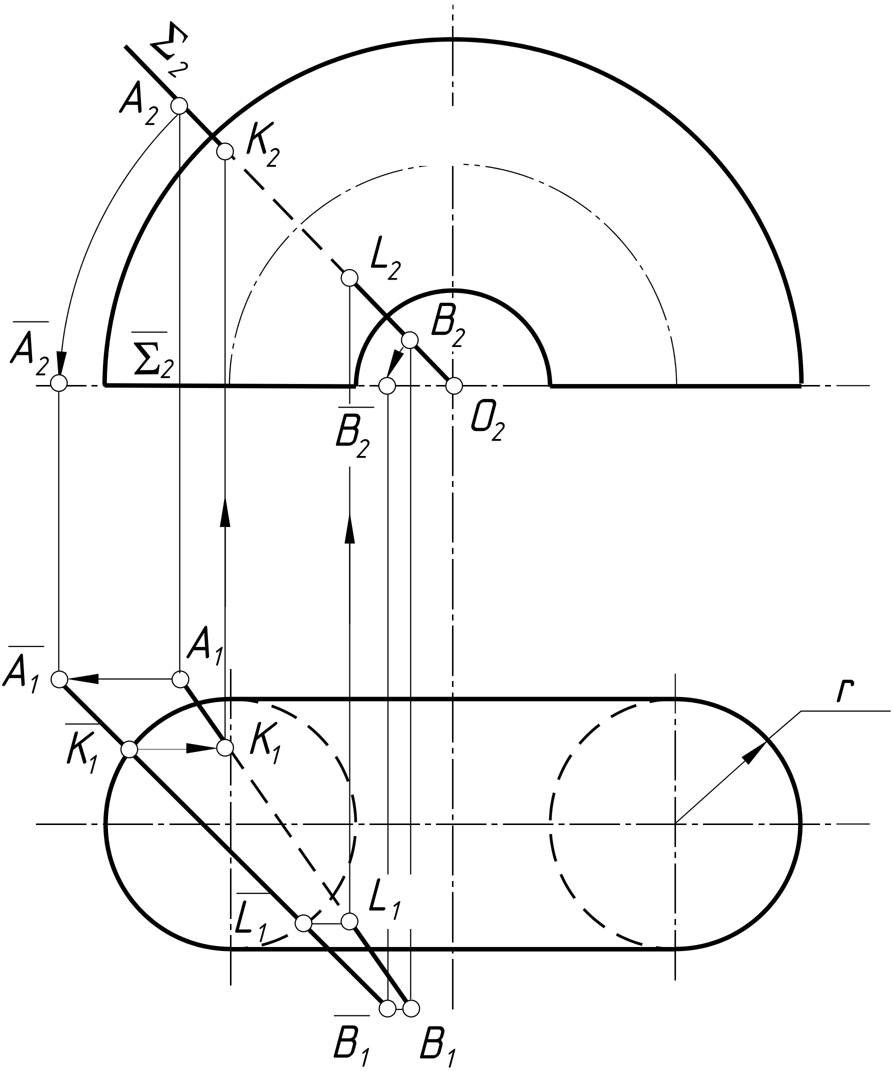
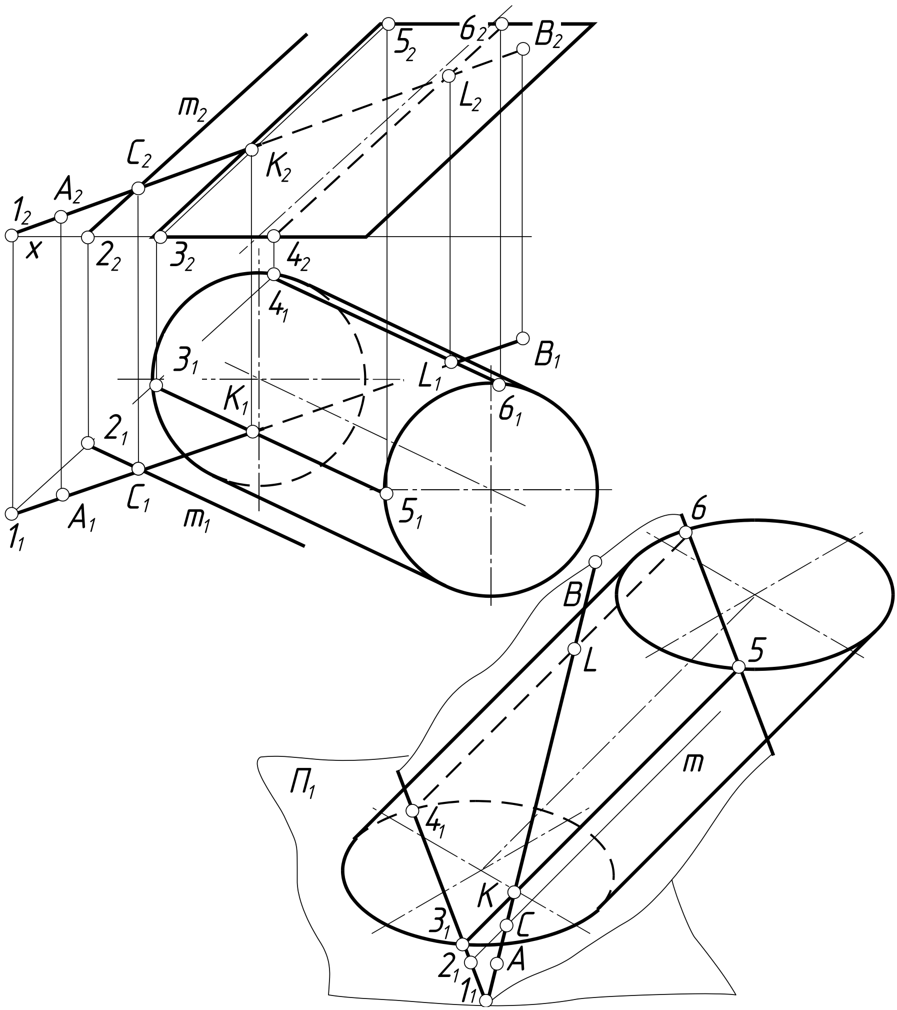


Рисунок 22



1_2
A_2
C_2
m_2
5_2
6_2
B_2
L_2
K_2
x
2_2
3_2
4_2
4_1
3_1
L_1
B_1
6_1
K_1
2_1
C_1
A_1
1_1
m_1
5_1
6
B
L
5
m
$П_1$
4_1
K
C
3_1
2_1
A
1_1

Рисунок 23

3. Знаходимо точки перетину **1** ($\mathbf{1_2}$, $\mathbf{1_1}$) та **2** ($\mathbf{2_2}$, $\mathbf{2_1}$) прямих **AB** і **m** горизонтальною площиною проекцій, тобто горизонтальні сліди прямих.

4. З'єднуємо точки $\mathbf{1_1}$ та $\mathbf{2_1}$, одержуємо горизонтальний слід допоміжної площини, яка буде площиною загального положення.

5. Основа циліндра належить площині проекцій $\mathbf{\Pi_1}$, тому горизонтальний слід січної площини $\mathbf{h^0_1}$ та коло – основа циліндра перетинаються у точках $\mathbf{3_1}$ та $\mathbf{4_1}$.

6. Через одержані точки $\mathbf{3_1}$ та $\mathbf{4_1}$ проведемо горизонтальні проекції лінії перетину $\mathbf{3_15_1}$ та $\mathbf{4_16_1}$ січної площини з циліндром. Вони будуть паралельні до прямої $\mathbf{m_1}$.

7. Визначаємо точки $\mathbf{K_1}$ та $\mathbf{L_1}$ перетину твірних $\mathbf{3_15_1}$ та $\mathbf{4_16_1}$ з $\mathbf{A_1B_1}$. Це будуть горизонтальні проекції точок перетину прямої **AB** з поверхнею циліндра. Їхні фронтальні проекції $\mathbf{K_2}$ та $\mathbf{L_2}$ знайдемо на $\mathbf{A_2B_2}$ за проекційним зв'язком з $\mathbf{K_1}$ та $\mathbf{L_1}$.

6.4.2 Перетин прямої з поверхнею похилого конуса

Через пряму **AB** треба провести допоміжну січну площину, що буде перетинати конус по прямих лініях, тобто по твірних. Це можливо тільки у тому випадку, коли площина проведена через вершину конуса **S** ($\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$). А щоб точка **S** належала січній площині, необхідно, щоб вона належала прямій лінії цієї площини. Тому план розв'язання задачі буде таким:

1. На прямій **AB** (рис. 24) вибираємо довільну точку ***1*** ($\mathbf{1_2} \in \mathbf{A_2B_2}$; $\mathbf{1_1} \in \mathbf{A_1B_1}$).

2. Через точку ***1*** та вершину конуса **S** проводимо пряму **m** ($\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$) яка разом з прямою AB визначить січну площину.

3. Через те, що основа конуса належить фронтальній площині проекцій, знаходимо фронтальний слід $\mathbf{f^0_2}$ допоміжної площини. Для цього знаходимо фронтальні сліди $\mathbf{N_2}$ прямої **AB** та $\mathbf{N_2'}$ прямої **m**, які потім поєднуємо між собою. Лінія $\mathbf{N_2N_2'}$ – фронтальний слід січної площини.

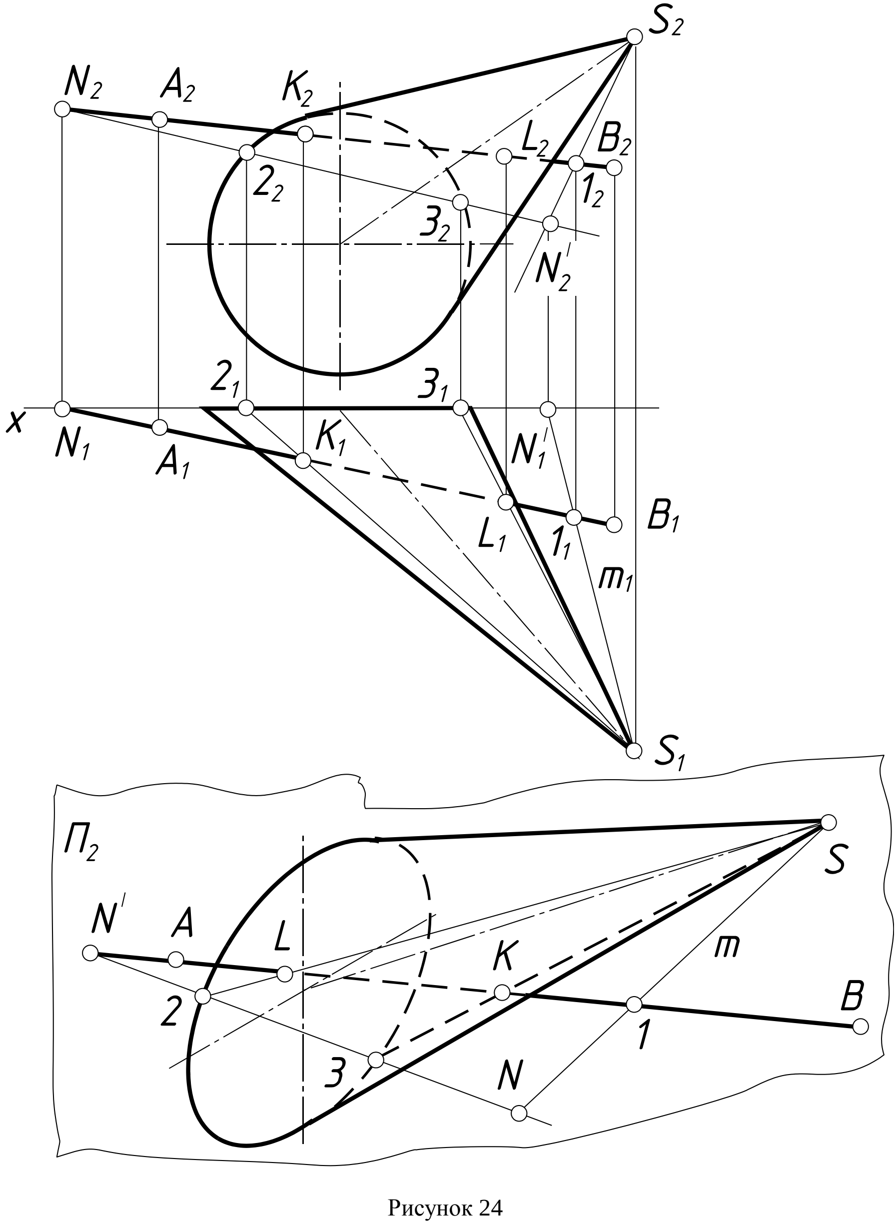
4. Знаходимо точки перетину $\mathbf{2_2}$ та $\mathbf{3_2}$ фронтального сліду січної площини з фронтальною проекцією кола – основи конуса.

5. Поєднуємо точки $\mathbf{2_2}$ та $\mathbf{3_2}$ з фронтальною проекцією вершини конуса $\mathbf{S_2}$ та $\mathbf{2_1}$ **і** $\mathbf{3_1}$ з $\mathbf{S_1}$. Одержуємо лінії перетину січної площини з поверхнею конуса.

Точки $\mathbf{K_2}$ і $\mathbf{L_2}$ перетину $\mathbf{A_2B_2}$ з твірною $\mathbf{2_2S_2}$ та $\mathbf{A_2B_2}$ з твірною $\mathbf{3_2S_2}$ визначають фронтальні проекції точок перетину прямої **AB** з поверхнею конуса. Їхні горизонтальні проекції $\mathbf{K_1}$ та $\mathbf{L_1}$ знайдуться на $\mathbf{A_1B_1}$ за проекційним зв'язком з $\mathbf{K_2}$ та $\mathbf{L_2}$.

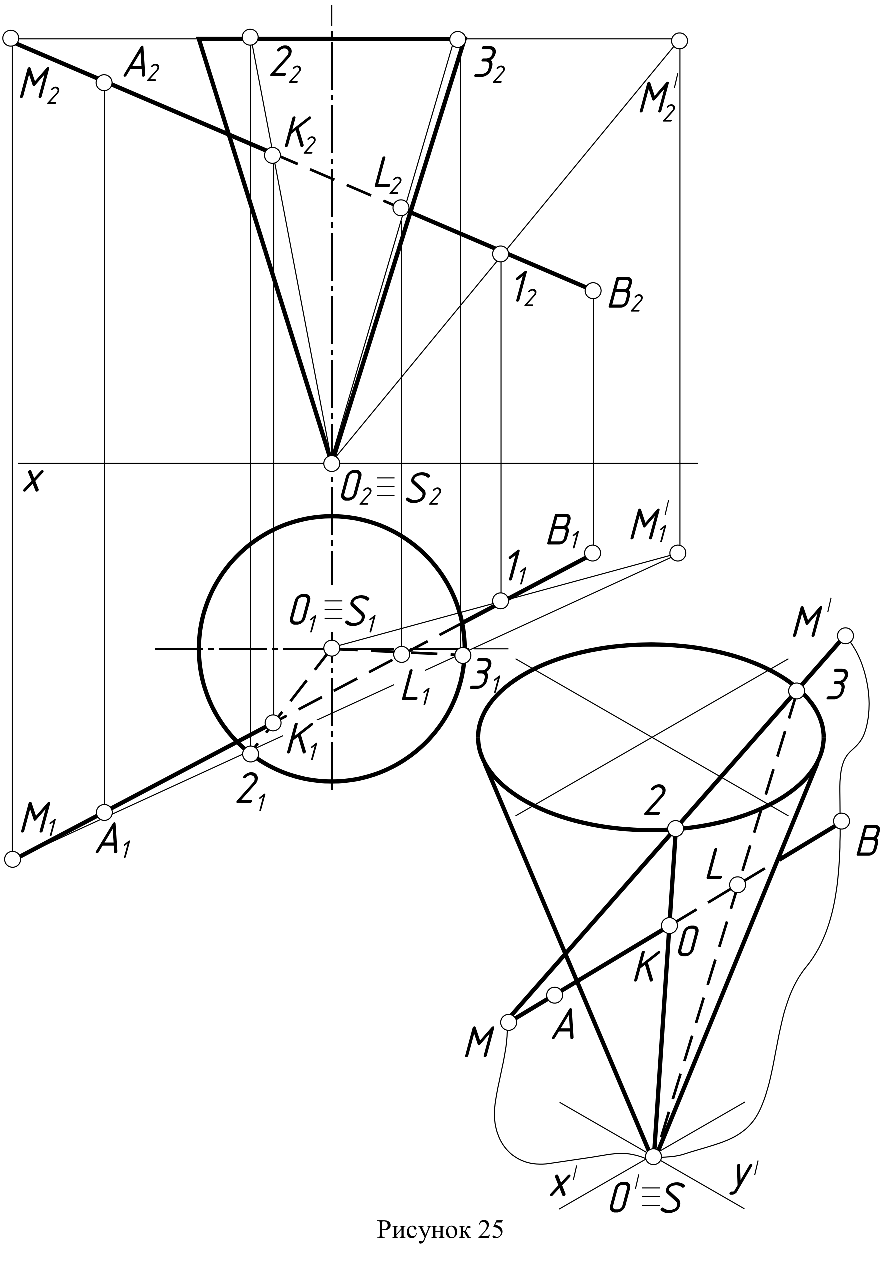
6.4.3 Перетин прямої з поверхнею прямого конуса

Як у попередньому випадку, допоміжна січна площина повинна бути проведена через вершину конуса **S**.



S2
N2
A2
K2
L2
B2
2_2
1_2
3_2
N'_2
x
2_1
3_1
N1
A1
K1
N'_1
L1
1_1
B1
m1
S1
П2
N'
A
L
K
S
m
2
1
B
3
N

Рисунок 24



M_2
A_2
2_2
3_2
M_2^I
K_2
L_2
1_2
B_2
x
$O_2 \equiv S_2$
B_1
M_1^I
1_1
$O_1 \equiv S_1$
L_1
3_1
K_1
2_1
M_1
A_1
M^I
3
2
B
L
O
K
A
M
x^I
$O^I \equiv S$
y^I

Рисунок 25

Для цього на прямій **AB** беремо довільну точку ***1*(*1*$_1$, *1*$_2$),** поєднуємо її прямою з вершиною конуса **S**. Прямі **AB** та **S1** визначили шукану площину. Далі знаходимо лінію перетину цієї площини з площиною основи конуса, яка являє собою горизонтальну площину рівня. Для цього знайдемо фронтальні проекції $\mathbf{M_2}$ та $\mathbf{M_2'}$ точок перетину прямих $\mathbf{A_2B_2}$ та $\mathbf{S_21_2}$ з фронтальною проекцією основи конуса (рис. 25).

На $\mathbf{A_1B_1}$ та $\mathbf{S_11_1}$ знайдемо $\mathbf{M_1}$ та $\mathbf{M_1'}$ **-** горизонтальні проекції цих точок, які поєднуємо між собою. $\mathbf{M_1M_1'}$ – лінія перетину допоміжної січної площини з площиною основи конуса. Отже ця лінія перетинає основу конуса – коло в точках **2** та **3** ($\mathbf{2_1}$, $\mathbf{2_2}$ та $\mathbf{3_1}$, $\mathbf{3_2}$). Поєднавши ці точки з вершиною конуса, одержимо **S2** ($\mathbf{S_12_1}$, $\mathbf{S_22_2}$) та **S3** ($\mathbf{S_13_1}$, $\mathbf{S_23_2}$) лінії перетину допоміжної січної площини з поверхнею конуса, які перетинаючись з заданою прямою **AB**, дають точки перетину **K** ($\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$) та **L** ($\mathbf{L_1}$, $\mathbf{L_2}$) цієї прямої з поверхнею конуса.

7 ВИЗНАЧЕННЯ ВИДИМОСТІ НА КРЕСЛЕННІ

Для визначення видимості на кресленні слід користуватися конкуруючими точками. Конкуруючі точки – це точки, які належать одному проектуючому променю, але різним прямим. Видимість треба визначати відносно площин проекцій. Так, наприклад, для визначення видимості прямої та поверхні циліндроїда (рис. 15) відносно горизонтальної площини проекцій вибрані дві конкуруючі точки **S** та **C**, горизонтальні проекції яких збігаються **(C1 ? S1).** Точка **S** належить прямій, а точка **C** – твірній циліндроїда. Порівнявши їхні координати **Z** , помічаємо, що $\mathbf{Z_S} > \mathbf{Z_C}$, тобто на площині $\mathbf{\Pi_1}$ точка **S** – видима, отже пряма $\mathbf{A_1B_1}$ – видима, тобто вона над поверхнею аж до точки **K** – перетину її з циліндроїдом. У точці перетину видимість змінюється на протилежну.

Для визначення видимості відносно фронтальної площини проекцій застосовані конкуруючі точки **R** та **T**, ($\mathbf{R_2} \equiv \mathbf{T_2}$). Порівнявши координату **Y** бачимо, що $\mathbf{Y_R} > \mathbf{Y_T}$ тобто точка **R**, що належить твірній циліндроїда, видима. Отже у цій частині пряма **AB** (до точки $\mathbf{K_2}$) невидима, тобто вона розташована за поверхнею. Перетинаючись з поверхнею (лівіше точки $\mathbf{K_2}$), пряма виходить уперед і стає видимою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Фольта О. В., Антонович С. А., Юрковський П. В. Нарисна геометрія. - Л.: Світ, 1994. – 303 с.
2. Краснокутский А. М., Федоренко Н. А., Грицай Н. В. Некоторые сложные поверхности. – Х.: ХПИ, 1993 – 30 с.

Навчальне видання

КОНСТРУЮВАННЯ ДЕЯКИХ ПОВЕРХОНЬ ТА ПЕРЕТИН ЇХ ПРЯМОЮ

Методичні вказівки

для студентів машинобудівних спеціальностей

Укладачі: ФЕДОРЕНКО НІНА ОЛЕКСАНДРІВНА
ГЛІБКО ОЛЕНА АНАТОЛІЇВНА
ШЕВЧЕНКО МИХАЙЛО МИХАЙЛОВИЧ
ШУТЄЄВА ЛІДІЯ МИКОЛАЇВНА
ІВАШКО АНДРІЙ ВАСИЛЬОВИЧ

Відповідальний випусковий Краснокутський А.М.

В авторській редакції

План 2003 р.

Підп, до друку .0 .2003 р. Формат 60х84 1/16. Папір Captain.
Друк офсетний. арнітура Таймс. Умовн. друк арк. 1,7.
Облік.- вид. арк.2,1 Наклад 800 прим. Зам. № Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ "ХПІ". Свідоцтво ДК №116 від 10.07.2000 р.
61002, вул Фрунзе, 21

Друкарня НТУ "ХПІ"